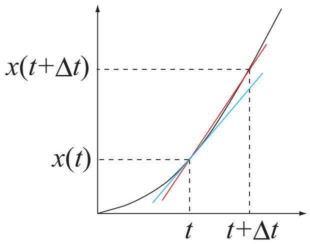
§1 力学と微積分・ベクトル

力学で用いる高校数学をまとめる。

1　微分・速さ・加速度



関数 $x(t)$ の微分（一階微分）を

$$x'(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \tag{1}$$

で定義する。ここで、記号「≡」は「定義式」を表す。

$x'(t)$ は、幾何学的には、曲線 $x(t)$ の点 t における接線の傾きである。これは、次のような考察からわかる。極限を取る前の式

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

は、点 $(t, x(t))$ と点 $(t+\Delta t, x(t+\Delta t))$ を結ぶ直線（図の赤色の直線）の傾きである。ここで、Δx をどんどん小さくしていくと、曲線 $x(t)$ の点 t における接線（図のシアン色の直線）が得られ、その傾きは (1) 式で表される。

次に、関数 $x(t)$ の二階微分を次式で定義する。

$$x''(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x'(t+\Delta t)-x'(t)}{\Delta t}. \tag{2}$$

すなわち、$x''(t)$ は一階微分 $x'(t)$ の微分に他ならない。

$x(t)$ が直線上を運動する物体の時刻 t における位置を表すものとする。すると、その微分

$$v(t) \equiv x'(t) \tag{3a}$$

は、時刻 t における物体の**速さ**という意味を持つ。また、速さの微分

$$a(t) \equiv v'(t) = x''(t) \tag{3b}$$

は、速さ $v(t)$ の変化率、すなわち**加速度**を意味する。

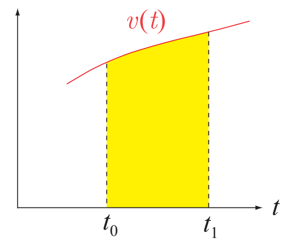
力学では、$x'(t)$ と $x''(t)$ を、それぞれ $\dot{x}(t)$ および $\ddot{x}(t)$ とも表現する。すなわち、

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}, \qquad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{4}$$

である。長さ、速さ、加速度の単位としては、それぞれ標準的に、メートル（m）、一秒毎の移動距離（m/s）、一秒毎の速さの変化（m/s^2）が用いられる。

2　積分

関数 $v(t)$ の $t=t_0$ から $t=t_1$ までの積分を次のように表す。



$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt. \tag{5}$$

これは、右図の黄色い領域の面積である。

特に、$v(t)$ が直線上を運動する物体の速さの場合、(3a) 式に基づき

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

と表し、上の式に代入すると、

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\frac{dx(t)}{dt}\,dt=\Big[x(t)\Big]_{t=t_0}^{t_1}=x(t_1)-x(t_0)$$

と積分できる。これより、上図の黄色い領域の面積が、時刻 t_0 から t_1 までの間に物体が移動した距離を表すことがわかる。上の式で $x(t_0)$ を最左辺に移項すると、時刻 t_1 における物体の位置 $x(t_1)$ が、時刻 t_0 での位置 $x_0\equiv x(t_0)$ と速さ $v(t)$ を用いて、

$$x(t_1)=x_0+\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt \tag{6}$$

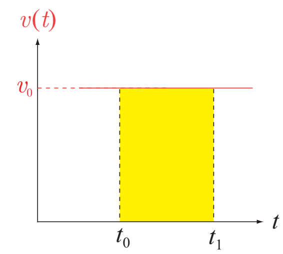
と表せる。

速さ $v(t)$ と加速度 $a(t)$ との間にも微分の関係式 (3b) が成立する。従って、時刻 t_1 での速さ $v(t_1)$ は、時刻 t_0 での速さ $v_0\equiv v(t_0)$ と加速度 $a(t)$ を用いて、

$$v(t_1)=v_0+\int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt \tag{7}$$

と表せる。

2.1　等速直線運動



例として、速さが一定の等速直線運動

$$v(t)=v_0\ \Big(=一定\Big) \tag{8a}$$

を考える。この場合の加速度は、

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=0 \tag{8b}$$

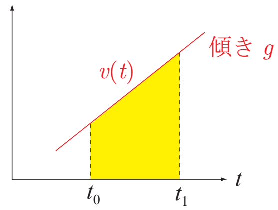
のようにゼロとなる。また、(8a) 式を (6) 式に代入すると、時刻 t_1 での位置が、

$$\begin{aligned}x(t_1)&=x_0+\int_{t_0}^{t_1} v_0\,dt\\&=x_0+v_0(t_1-t_0).\end{aligned} \tag{8c}$$

と表せることがわかる。$v_0(t_1-t_0)$ は、図の黄色い長方形領域の面積である。

2.2　等加速度運動

もう一つの例として、加速度が一定の等加速度運動



$$a(t) = a_0 \ \left(= 一定\right) \tag{9a}$$

を考える。この場合の速さは、(9a) 式を (7) 式に代入して積分し、

$$\begin{aligned} v(t_1) &= v_0 + \int_{t_0}^{t_1} g\,dt \\ &= v_0 + a_0(t_1 - t_0) \end{aligned} \tag{9b}$$

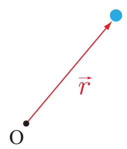
と得られる。また、(9b) 式で $t_1 \to t$ と置き換えて (6) 式に代入すると、時刻 t_1 での位置が、

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Big[v_0 + a_0(t - t_0)\Big]\,dt \\ &= x_0 + \left[v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2\right]_{t=t_0}^{t_1} \\ &= x_0 + v_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 \end{aligned} \tag{9c}$$

と表せることがわかる。図の黄色い領域の面積は、時刻 t_0 から t_1 までの間に移動した距離に等しい。

3　ベクトル

空間内にある物体の位置は、位置ベクトル



$$\vec{r} \equiv (x, y, z) \tag{10}$$

を用いて表せる。高校数学ではベクトルを $\vec{r}$ のように表現するが、大学の数学では、太字（ボールドフェイス）で $\boldsymbol{r}$ と表現されることも多い。すなわち

$$\vec{r} = \boldsymbol{r}$$

である。「位置ベクトル $\vec{r}$」は単に「位置 $\vec{r}$」とも言い表す。

運動する物体では、その位置 $\vec{r}$ が時々刻々と変化する。すなわち、位置 $\vec{r}$ は時刻 t の関数である。このことを強調する場合には、物体の位置ベクトルを

$$\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t)) \tag{11}$$

と表す。同様に、速度もベクトルで

$$\vec{v}(t) \equiv (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \tag{12}$$

と表現する。ここで $v_x(t)$ は、時刻 t における速度の x 成分であり、

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

の関係がある。速度の y 成分と z 成分についても、位置 $\vec{r}$ の y 成分と z 成分の微分として表せる。以上をまとめ、速度を

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) \equiv \dot{\vec{r}}(t) \tag{13}$$

のように、ベクトル $\vec{r}(t)$ の微分として表すと便利である。すなわち、ベクトル $\vec{r}(t)$ に対する微分操作は、そのすべての要素について行うものと約束する。同様に、加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ も、速度ベクトル $\vec{v}(t)$ の微分として、

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \tag{14}$$

と表現できる。

ベクトルの積分も同様に実行できる。(14) 式の最初の等式を t_0 から t_1 まで積分すると、

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} dt \tag{15}$$

となる。この積分は、その成分すべてについて実行するものと約束する。右辺は

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} dt = \Big[\vec{v}(t)\Big]_{t=t_0}^{t_1} = \vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)$$

と積分できる。この結果を (15) 式の右辺に代入して $\vec{v}(t_0) \equiv \vec{v}_0$ を移項すると、時刻 t_1 での速度が、

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\, dt \tag{16}$$

と得られる。同様に、(13) 式を積分すると、時刻 t_1 での位置が

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\, dt \tag{17}$$

と求まる。

3.1 等速直線運動

例として、速度が一定の等速直線運動

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \ \Big(= \text{一定}\Big) \tag{18a}$$

を考える。この場合の加速度は、

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{0} \tag{18b}$$

のようにゼロとなる。また、(18a) 式を (17) 式に代入すると、時刻 t_1 での位置が、

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_1) &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}_0\, dt \\ &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t_1 - t_0) \end{aligned} \tag{18c}$$

と表せることがわかる。

3.2　等加速度運動

第二の例として、加速度が一定の**等加速度運動**

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_0 \ \left(=\text{一定}\right) \tag{19a}$$

を考える。この場合の速度は、(19a) 式を (16) 式に代入して積分し、

$$\begin{aligned}\vec{v}(t_1)&=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t_1}\vec{a}_0\,dt\\&=\vec{v}_0+\vec{a}_0(t_1-t_0)\end{aligned} \tag{19b}$$

と求まる。また、(19b) 式で $t_1\to t$ と置き換えて (17) 式に代入し、積分を実行すると、時刻 t_1 での位置が、

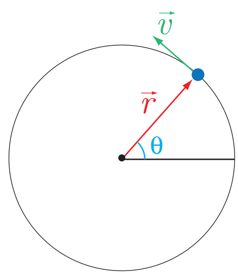
$$\begin{aligned}\vec{r}(t_1)&=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t_1}\left[\vec{v}_0+\vec{a}_0(t-t_0)\right]dt\\&=\vec{r}_0+\left[\vec{v}_0(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{a}_0(t-t_0)^2\right]_{t=t_0}^{t_1}\\&=\vec{r}_0+\vec{v}_0(t_1-t_0)+\frac{1}{2}\vec{a}_0(t_1-t_0)^2\end{aligned} \tag{19c}$$

と表せる。

3.3　等速円運動

第三の例として、一定の速さで円運動する**等速円運動**を考える。等速円運動では、回転中心の周りの角 θ（単位：rad）が、時間 t の一次関数として

$$\theta(t)=\omega_0 t+\theta_0 \qquad (\omega_0,\theta_0:\ \text{定数}) \tag{20}$$



のように変化する。ここで、ω_0 は角速度（単位：rad/s)、θ_0 は初期位相（単位：rad）と呼ばれる。対応する位置ベクトルは、(i) 回転の中心を原点とし、(ii) 回転面を xy 面に選び、(iii) 運動が半径 r_0 の円を描くものとすると、

$$\begin{aligned}\vec{r}(t)&=(r_0\cos\theta, r_0\sin\theta, 0)\\&=(r_0\cos(\omega_0 t+\theta_0), r_0\sin(\omega_0 t+\theta_0), 0)\end{aligned} \tag{21a}$$

と表せる。対応する速度と加速度は、(13) 式と (14) 式を用いて、

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=(-r_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\theta_0), r_0\omega_0\cos(\omega_0 t+\theta_0), 0) \tag{21b}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=(-r_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\theta_0), -r_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\theta_0), 0) \tag{21c}$$

と計算できる。(21a) 式と (21c) 式より、原点を回転中心とする等速円運動の位置と加速度の間に、

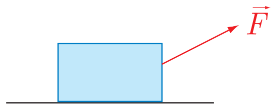
$$\vec{a}(t)=-\omega_0^2\vec{r}(t) \tag{22}$$

の関係があることがわかる。すなわち、加速度ベクトルは、回転中心を原点とする位置ベクトルと同一直線上にあり、それらの向きは逆である。また、速度 (21b) の大きさ $|\vec{v}|\equiv\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ は、回転半径 r_0 と角速度 ω_0 を用いて、

$$|\vec{v}|=r_0\omega_0 \tag{23}$$

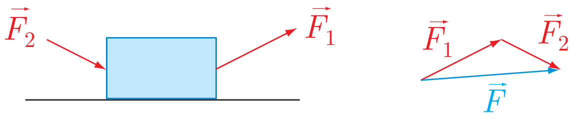
と表される。

3.4　力



右図のように、物体に働く力 (force) もベクトルで表現できる。力を表すベクトルは、通常、force の頭文字 f を大文字かつ太字にして、$\vec{F}$ と表される。

物体に二つの力 $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ が働くような場合を考える。例えば、一つの物体を前の人が引き、後ろの人が押すような場合である。その場合の物体に働く合力 $\vec{F}$ は、$\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ のベクトル和として、$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ のように表せる。



(a) 物体に加わる二つの力

(b) 力の合成

一般に、n 個の力 $\vec{F}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の合力 $\vec{F}$ は、

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{24}$$

となる。