1　力学と微積分・ベクトル

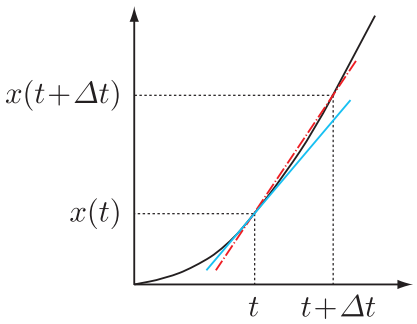
力学で用いる高校数学をまとめる．

1.1　微分・速度・加速度

関数 $x(t)$ の微分（一階微分）を

$$x'(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{1.1}$$

で定義する．ここで，記号「$\equiv$」は「定義式」を表す．



$x'(t)$ は，幾何学的には，曲線 $x(t)$ の点 t における接線の傾きである．これは，次のような考察からわかる．極限を取る前の式

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

は，点 $(t, x(t))$ と点 $(t+\Delta t, x(t+\Delta t))$ を結ぶ直線（図の赤色の直線）の傾きである．ここで，Δx をどんどん小さくしていくと，曲線 $x(t)$ の点 t における接線（図のシアン色の直線）が得られ，その傾きは (1.1) 式で表される．

次に，関数 $x(t)$ の二階微分を次式で定義する．

$$x''(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x'(t+\Delta t) - x'(t)}{\Delta t}. \tag{1.2}$$

すなわち，$x''(t)$ は一階微分 $x'(t)$ の微分に他ならない．

$x(t)$ が直線上を運動する物体の時刻 t における位置を表す場合，その微分

$$v(t) \equiv x'(t) \tag{1.3a}$$

は，時刻 t における物体の**速度**という意味を持つ．また，速度の微分

$$a(t) \equiv v'(t) = x''(t) \tag{1.3b}$$

は，速度 $v(t)$ の変化率，すなわち**加速度**を意味する．

力学では，$x'(t)$ と $x''(t)$ を，それぞれ $\dot{x}(t)$ および $\ddot{x}(t)$ とも表現する．すなわち，

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}, \qquad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{1.4}$$

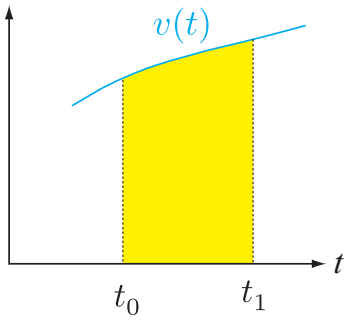
である．長さ，速度，加速度の単位としては，それぞれ標準的に，メートル（m），一秒毎の移動距離（m/s），一秒毎の速度の変化（m/s^2）が用いられる．

1.2 積分

1.2.1 位置・速度・加速度の関係

関数 $v(t)$ の $t = t_0$ から $t = t_1$ までの積分を次のように表す．

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt. \tag{1.5}$$



これは，右図の黄色い領域の面積である．

特に，$v(t)$ が直線上を運動する物体の速度の場合，(1.3a) 式に基づき

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

と表し，上の式に代入すると，

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dx(t)}{dt}\,dt = \Big[x(t)\Big]_{t=t_0}^{t_1} = x(t_1) - x(t_0)$$

と積分できる．これより，上図の黄色い領域の面積が，時刻 t_0 から t_1 までの間に物体が移動した距離を表すことがわかる．上の式で $x(t_0)$ を最左辺に移項すると，時刻 t_1 における物体の位置 $x(t_1)$ が，時刻 t_0 での位置 $x_0 \equiv x(t_0)$ と速度 $v(t)$ を用いて，

$$x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt \tag{1.6}$$

と表せる．

速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ との間にも微分の関係式 (1.3b) が成立する．従って，時刻 t_1 での速度 $v(t_1)$ は，時刻 t_0 での速度 $v_0 \equiv v(t_0)$ と加速度 $a(t)$ を用いて，

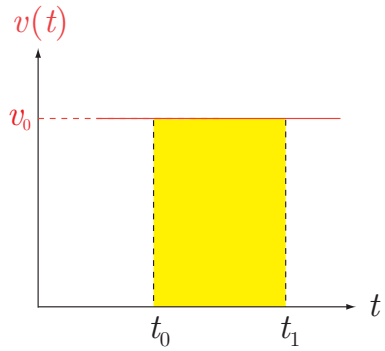
$$v(t_1) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt \tag{1.7}$$

と表せる．

1.2.2 等速直線運動

例として，速度が一定の等速直線運動

$$v(t) = v_0 \ \big(= \text{一定}\big) \tag{1.8a}$$



を考える．この場合の加速度は，

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0 \tag{1.8b}$$

のようにゼロとなる．また，(1.8a) 式を (1.6) 式に代入すると，時刻 t_1 での位置が，

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1} v_0\,dt \\ &= x_0 + v_0(t_1 - t_0). \end{aligned} \tag{1.8c}$$

と表せることがわかる．$v_0(t_1 - t_0)$ は，図の黄色い長方形領域の面積である．

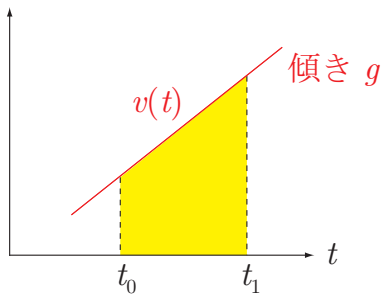
1.2.3　等加速度運動

もう一つの例として，加速度が一定の**等加速度運動**

$$a(t) = a_0 \ \big(= \text{一定}\big) \tag{1.9a}$$

を考える．この場合の速度は，(1.9a) 式を (1.7) 式に代入して積分し，

$$\begin{aligned} v(t_1) &= v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a_0\, dt \\ &= v_0 + a_0(t_1 - t_0) \end{aligned} \tag{1.9b}$$



と得られる．また，(1.9b) 式で $t_1 \to t$ と置き換えて (1.6) 式に代入すると，時刻 t_1 での位置が，

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \big[v_0 + a_0(t - t_0)\big]\, dt \\ &= x_0 + \left[v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2\right]_{t=t_0}^{t_1} \\ &= x_0 + v_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 \end{aligned} \tag{1.9c}$$

と表せることがわかる．ここで，被積分関数 $t - t_0$ の原始関数として，$\frac{1}{2}t^2 - t_0 t$ の代わりに $\frac{1}{2}(t - t_0)^2$ を選んだ．両者を微分すると共に $t - t_0$ に戻るが，第二の表式 $\frac{1}{2}(t - t_0)^2$ の方が，積分領域の下端 $t = t_0$ からの寄与がゼロになるので，積分の計算が楽になる．図の黄色い領域の面積は，時刻 t_0 から t_1 までの間に移動した距離に等しい．

1.3　ベクトル

1.3.1　位置・速度・加速度

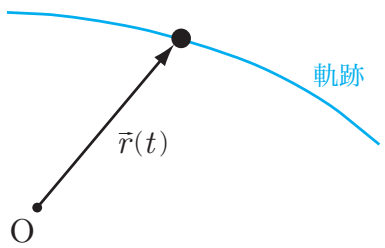
空間内にある物体の位置は，位置ベクトル

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) \tag{1.10}$$

を用いて表せる．高校数学ではベクトルを $\vec{r}$ のように表現するが，大学の数学では，太字（ボールドフェイス）で $\boldsymbol{r}$ と表現されることも多い．すなわち $\vec{r} = \boldsymbol{r}$ である．「位置ベクトル $\vec{r}$」は単に「位置 $\vec{r}$」とも言い表す．

運動する物体では，その位置 $\vec{r}$ が時々刻々と変化する．すなわち，位置 $\vec{r}$ は時刻 t の関数である．このことを強調する場合には，物体の位置ベクトルを

$$\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t)) \tag{1.11}$$



と表す．$\vec{r}(t)$ の軌跡は，一般に，直線や曲線などの線を構成する．同様に，速度もベクトルで

$$\vec{v}(t) \equiv (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \tag{1.12}$$

と表現する．ここで $v_x(t)$ は，時刻 t における速度の x 成分であり，

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

の関係がある．速度の y 成分と z 成分についても，位置 $\vec{r}$ の y 成分と z 成分の微分として表せる．以上をまとめ，速度を

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) \equiv \dot{\vec{r}}(t) \tag{1.13}$$

のように，ベクトル $\vec{r}(t)$ の微分として表すと便利である．すなわち，ベクトル $\vec{r}(t)$ に対する微分操作は，そのすべての要素について行うものと約束する．同様に，加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ も，速度ベクトル $\vec{v}(t)$ の微分として，

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \tag{1.14}$$

と表現できる．

ベクトルの積分も同様に実行できる．(1.14) 式の最初の等式を t_0 から t_1 まで積分すると，

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} dt \tag{1.15}$$

となる．この積分は，その成分すべてについて実行する．すなわち，$\vec{a}(t) \equiv (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ の積分は，

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\,dt \equiv \left(\int_{t_0}^{t_1} a_x(t)\,dt, \int_{t_0}^{t_1} a_y(t)\,dt, \int_{t_0}^{t_1} a_z(t)\,dt\right)$$

で定義されている．(1.15) 式の右辺は，

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} dt = \left[\vec{v}(t)\right]_{t=t_0}^{t_1} = \vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)$$

と積分できる．この結果を (1.15) 式の右辺に代入して $\vec{v}(t_0) \equiv \vec{v}_0$ を移項すると，時刻 t_1 での速度が，

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\,dt \tag{1.16}$$

と得られる．同様に，(1.13) 式を積分すると，時刻 t_1 での位置が

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt \tag{1.17}$$

と求まる．

1.3.2　速さ

1 次元運動における速度 (1.3a) の絶対値 $|v(t)|$ は，**速さ**と呼ばれている．例えば，速度の一般式が $v(t) = -2t + 2$ で与えられる場合，$t = 2$ における速度は $v(2) = -4 + 2 = -2$，その速さは $|v(2)| = 2$ である．

同様に，3 次元運動の速度 (1.13) に対応する速さも，

$$v \equiv |\vec{v}| \equiv \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1.18}$$

で定義されている．ここで，表記を単純化するため，(1.13) 式の独立変数 t を省略した．このように，3 次元運動の速度 $\vec{v}$ に対応する速さは，v のようにイタリック体で表現するのが標準となっている．この速さの表記 v は，1 次元運動の場合の速度 (1.3a) と同じであり，混乱を招く恐れもあるが，文脈から区別が可能であろう．例えば速度 $\vec{v} = (1, -2, 2)$ に対する速さ v は，$v = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ と計算できる．

1.3.3　等速直線運動

例として，速度が一定の**等速直線運動**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \ \big(= \text{一定}\big) \tag{1.19a}$$

を考える．この場合の加速度は，

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{0} \tag{1.19b}$$

のようにゼロとなる．また，(1.19a) 式を (1.17) 式に代入すると，時刻 t_1 での位置が，

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_1) &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}_0 \, dt \\ &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t_1 - t_0) \end{aligned} \tag{1.19c}$$

と表せることがわかる．

1.3.4　等加速度運動

第二の例として，加速度が一定の**等加速度運動**

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 \ \big(= \text{一定}\big) \tag{1.20a}$$

を考える．この場合の速度は，(1.20a) 式を (1.16) 式に代入して積分し，

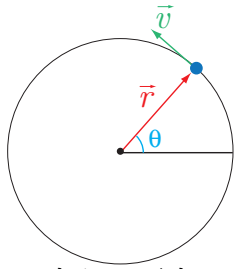
$$\begin{aligned} \vec{v}(t_1) &= \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}_0 \, dt \\ &= \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t_1 - t_0) \end{aligned} \tag{1.20b}$$

と求まる．また，(1.20b) 式で $t_1 \to t$ と置き換えて (1.17) 式に代入し，積分を実行すると，時刻 t_1 での位置が，

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t_1) &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \left[\vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0)\right] dt \\
&= \vec{r}_0 + \left[\vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2\right]_{t=t_0}^{t_1} \\
&= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t_1 - t_0)^2 \qquad (1.20c)
\end{aligned}
$$

と表せる．

1.3.5　等速円運動



第三の例として，一定の速さで円運動する**等速円運動**を考える．等速円運動では，回転中心の周りの角 θ（単位：rad）が，時間 t の一次関数として

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \qquad (\omega_0, \theta_0:\ \text{定数}) \tag{1.21}$$

のように変化する．ここで，ω_0 は角振動数（単位：rad/s），θ_0 は初期位相（単位：rad）と呼ばれる．対応する位置ベクトルは，(i) 回転の中心を原点とし，(ii) 回転面を xy 面に選び，(iii) 運動が半径 r_0 の円を描くものとすると，

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (r_0\cos\theta, r_0\sin\theta, 0)\\ &= (r_0\cos(\omega_0 t+\theta_0), r_0\sin(\omega_0 t+\theta_0), 0)\end{aligned} \tag{1.22a}$$

と表せる．対応する速度と加速度は，(1.13) 式と (1.14) 式を用いて，

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-r_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\theta_0), r_0\omega_0\cos(\omega_0 t+\theta_0), 0) \tag{1.22b}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (-r_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\theta_0), -r_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\theta_0), 0) \tag{1.22c}$$

と計算できる．(1.22a) 式と (1.22c) 式より，原点を回転中心とする等速円運動の位置と加速度の間に，

$$\vec{a}(t) = -\omega_0^2\vec{r}(t) \tag{1.23}$$

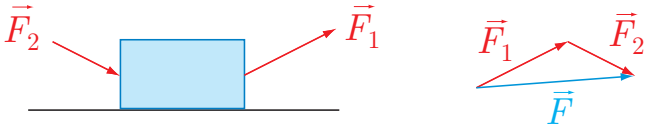
の関係があることがわかる．すなわち，加速度ベクトルは，回転中心を原点とする位置ベクトルと同一直線上にあり，それらの向きは逆である．また，速度 (1.22b) の大きさ $|\vec{v}| \equiv \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ は，回転半径 r_0 と角振動数 ω_0 を用いて，次のように表せる．

$$|\vec{v}| = r_0\omega_0. \tag{1.24}$$

1.3.6　力

右図のように，物体に働く力 (force) もベクトルで表現できる．力を表すベクトルは，通常，force の頭文字 f を大文字かつベクトルにして，$\vec{F}$ と表される．

物体に二つの力 $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ が働くような場合を考える．例えば，一つの物体を前の人が引き，後ろの人が押すような場合である．その場合の物体に働く合力 $\vec{F}$ は，$\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ のベクトル和として，$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ のように表せる．



(a) 物体に加わる二つの力　　(b) 力の合成

一般に，n 個の力 $\vec{F}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の合力 $\vec{F}$ は，

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{1.25}$$

となる．