

(平成 28 年 8 月 18 日実施)

## 平成 29 年度

### 北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午前）

#### 受験に関する注意

- 試験時間： 9:00～11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも問題 I, II を解答すること。
- 配布するものは

|          |          |                    |
|----------|----------|--------------------|
| 専門科目問題冊子 | 問題 I     | 2 枚 (A4)           |
|          | 問題 II    | 3 枚 (A4)           |
| 解答紙      | 問題 I     | 3 枚 (B4)           |
|          | 問題 II    | 3 枚 (B4)+1 枚 (A4)  |
| 草案紙      | 問題 I, II | 2 枚 (B4) (各問題 1 枚) |

# 問題 I

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 図 1(a) のように、質量も太さも無視できる長さ  $2l$  の糸の先に質量  $m$  の重り（質点 P）を付けた振り子が、固定点 O から鉛直下方向に垂れている。また、O から水平方向に距離  $l$  離れた位置 O' には太さの無視できる釘がある。この質点 P に  $\overrightarrow{OO'}$  方向に速さ  $v_0$  の初速度を与え運動を開始させる。このとき、振り子の糸は釘に引っかかった後もたわまず、質点 P は釘の周りを円運動し、限界到達点に至ったとする。その運動の軌跡を図 1(b) に示す。重力加速度は鉛直下向きに大きさ  $g$  とし、空気抵抗や糸に生じる摩擦は考えないものとする。

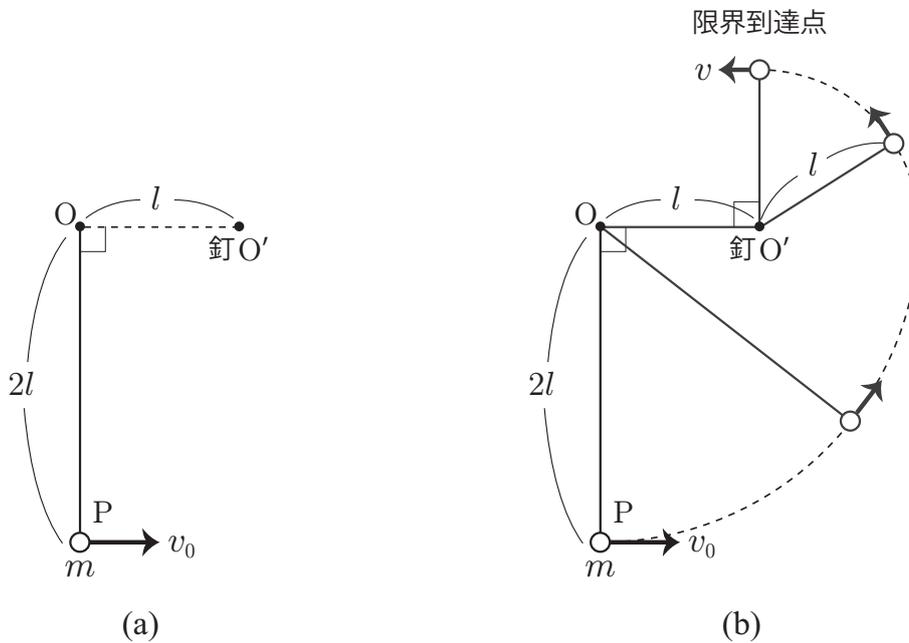


図 1

- 1-1. 力学的エネルギー保存則から、限界到達点における質点 P の速さ  $v$  を求めよ。
- 1-2. 質点が限界到達点にあるときの糸の張力の大きさ  $S$  を求めよ。
- 1-3. 質点が限界到達点に至るために最低限必要な  $v_0$  を  $g$  と  $l$  を用いて表せ。

問 2 2つの同種希ガス原子間の引力相互作用について考える。その簡単なモデルとして、図2のような電氣的に相互作用する2つの調和振動子(1と2)を考える。各調和振動子は、 $+e$ の電荷を持つ原子核と $-e$ の電荷を持つ電子から構成されており、電気双極子とみなすことも出来る。各原子核からの位置 $x_1$ と $x_2$ にある電子はバネ定数 $k$ で表される復元力 $-kx_1, -kx_2$ を受けており、各調和振動子内の電氣的引力相互作用はこの復元力として有効的に考慮されている。ここで、電子は $x$ 軸に沿って原子核を中心に振動できるとし、その質量を $m$ 、運動量をそれぞれ $p_1, p_2$ とする。また、原子核は不動であり、各電子の運動できる範囲に比べて十分大きな距離 $R$ だけ離れている。

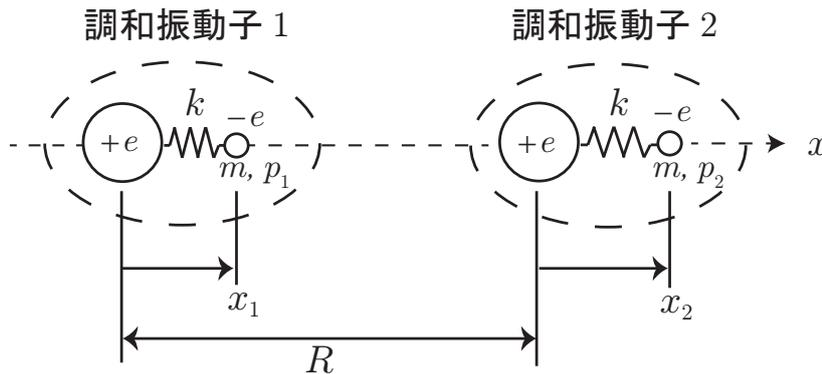


図 2

- 2-1. 調和振動子間に静電相互作用が無い場合の全系のハミルトニアン  $H_0$  を書き下せ。また、各調和振動子の固有角振動数  $\omega_0$  を求めよ。
- 2-2. 調和振動子間の静電相互作用エネルギー  $H_1$  を求めよ。ここで、一般に距離  $r$  だけ離れた電荷  $q_1, q_2$  間の静電相互作用エネルギーは  $\alpha \frac{q_1 q_2}{r}$  で表される ( $\alpha$  は正の定数)。
- 2-3.  $|x_1| \ll R$  かつ  $|x_2| \ll R$  のとき、 $H_1 \simeq H'_1 = -\frac{2\alpha e^2 x_1 x_2}{R^3}$  と近似できることを示せ。
- 2-4. 基準座標  $x_s = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ ,  $x_a = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$  と、それぞれに対応した基準運動量  $p_s = (p_1 + p_2)/\sqrt{2}$ ,  $p_a = (p_1 - p_2)/\sqrt{2}$  を導入し、全ハミルトニアン  $H = H_0 + H'_1$  を対称振動モード部分と反対称振動モード部分に分離せよ。ここで、下付きの s, a はそれぞれ対称、反対称振動モードを意味する。
- 2-5. 2-4 で導入した対称振動モードと反対称振動モードの固有角振動数  $\omega_s, \omega_a$  を求めよ。さらに、 $\frac{2\alpha e^2}{kR^3} \ll 1$  として、 $\omega_s$  と  $\omega_a$  を  $\frac{2\alpha e^2}{kR^3}$  について2次まで展開せよ。
- 2-6. 量子力学的には固有角振動数  $\omega$  を持つ調和振動子の最低エネルギーは  $\hbar\omega/2$  で与えられる。ここで、 $\hbar$  はプランク定数である。これまでの結果を用いて、静電相互作用が有る場合と無い場合の調和振動子系の最低エネルギーを比較し、静電相互作用による最低エネルギーの減少量が  $R^6$  に反比例することを示せ。この結果は調和振動子間に引力相互作用が働くことを意味しており、ファンデルワールス相互作用と呼ばれる。

## 問題 II

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 1-1. 静電平衡にある導体に対して、一般的に以下が成り立つことを簡潔に説明せよ。

- i. 導体内部に電場は存在しない
- ii. 導体内部および表面の電位は一定値である
- iii. 導体表面での電場は導体表面に対して垂直である
- iv. 電荷は導体表面だけに存在する

次に、図 1 に示した状況を考える。 $x$  軸上の位置  $(d, 0, 0)$  に、電荷  $+q$  が固定されている。さらに、原点  $O$  を含む  $yz$  平面を境界面とし、 $x < 0$  の領域を満たす半無限導体が接地されている。このとき  $x \geq 0$  の領域での電場を、電気映像法を用いて考えたい。以下では、半無限導体は静電平衡であるとする。また、導体が存在しない領域は真空であり、真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。1-1 に示した導体の性質を適宜引用しつつ、以下の問いに答えよ。

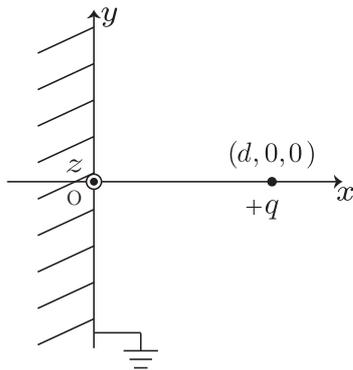


図 1

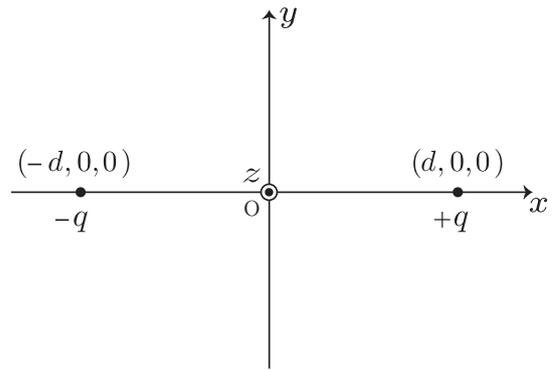


図 2

1-2. 図 1 で、導体表面の電位  $V$  を求めよ。

1-3. 次に、図 2 に示すように、位置  $(\pm d, 0, 0)$  に  $\pm q$  の電荷が固定されている場合を考える。この時、 $x = 0$  での電位  $V$  を求め、1-2 の結果と一致する事を確かめよ。ただし、無限遠方での電位を 0 とする。

1-4. 図 1 と図 2 において、 $x > 0$  の領域での電荷分布と、 $x = 0$  での電位が一致していることから、図 1 と図 2 の電位は  $x \geq 0$  の全領域で全く同じである事が結論づけられる。このことを踏まえ、図 1 の  $x \geq 0$  の領域での電場の様子を、電気力線を用いて、解答用紙 [問題 II 問 1 1-4. 用] の  $xy$  平面座標に図示せよ。

1-5. 図 1 の位置  $(0, a, 0)$  での、電場の  $x, y, z$  成分  $E_x, E_y, E_z$  を求めよ。

1-6. 図 1 の位置  $(0, a, 0)$  での、導体表面の電荷密度  $\rho$  を求めよ。

問 2 マクスウェルは当時知られていた電磁気学の諸法則をまとめ、電場  $\vec{E}$ 、磁束密度  $\vec{B}$  に対する基礎方程式を示した。電荷密度  $\rho$ 、電流密度  $\vec{j}$  があるときの真空中の電磁場は以下のマクスウェル方程式に従う。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left\{ \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\}. \quad (4)$$

ここで、 $\epsilon_0, \mu_0$  は真空の誘電率と透磁率である。

2-1. 式 (4) の右辺に現れる  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  は、変位電流と呼ばれる。マクスウェル方程式が電荷の保存則と矛盾しないためには、この項が必要である事を示せ。

2-2. ある時刻に電流密度  $\vec{j}$  が局所的に生じ、短時間経過の後にゼロになったとする。その後の電磁場  $\vec{E}, \vec{B}$  の時間変化を、式 (3) と式 (4) を用いて 定性的に 説明せよ。

2-3.  $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$  の場合に、電場が従う波動方程式を求めよ。次のベクトル解析の公式を証明なしに使って良い。

$$\text{任意のベクトル } \vec{A} \text{ に対し、} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \quad (5)$$

2-4. 2-3 で求めた波動方程式を満たす解として、

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t), \quad (6)$$

を考える。ここで、 $\vec{E}_0, k, \omega$  は座標と時間によらない量である。 $k$  と  $\omega$  の間に成り立つ関係を求めよ。また、電場は波の進行方向に対し垂直である事を示せ。

磁束密度に対しても同様の事が示せるため、電磁場は横波である事が結論づけられる。

次に誘電率  $\epsilon$ 、透磁率  $\mu$ 、電気伝導度  $\sigma$  の導体中を電磁波が伝播する様子を考察する。導体中でのマクスウェル方程式は、電束密度  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 、磁場  $\vec{H} = \vec{B} / \mu$  を用いて、次の様に与えられる。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7)$$

導体中では電磁波によって電流が誘起され、それに伴うエネルギー損失が生ずる。そのため図 3 に示すように、電磁波は減衰しながら伝播する。簡単のために、 $z$  軸方向に進む電磁波を想定し、かつ電場は  $x$  成分、磁束密度は  $y$  成分のみを持つとする。すなわち、

$$\vec{E} = (E_x(z, t), 0, 0), \quad \vec{B} = (0, B_y(z, t), 0), \quad (8)$$

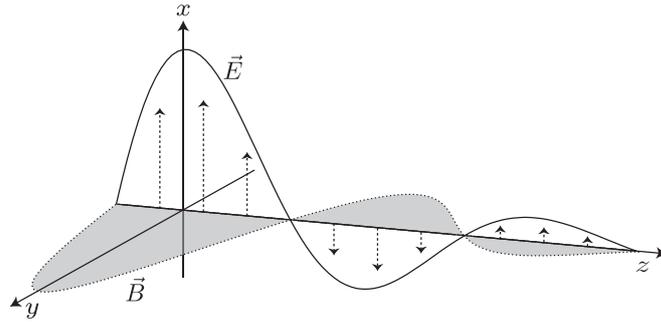


図3 導体中を減衰しながら伝播する電磁波。図中の矢印は電場によって誘起された電流を表す。

と表せるとして、以下の問に答えよ。

- 2-5. 電場によって導体に誘起される電流密度は  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  と表される。この事と、マクスウェル方程式より、導体中の電場は以下の式を満たす事を示せ。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z, t) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z, t) - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} E_x(z, t) = 0. \quad (9)$$

- 2-6. 式(9)を満たす電磁波として、 $E_x(z, t) = E_0 \exp[i(\kappa z - \omega t)]$  の形 ( $\kappa$  は複素数) を仮定し、その振幅が  $1/e$  倍に減衰するまでに電磁波が進む距離  $\delta$  を見積もりたい。ここで、 $e$  は自然対数の底 (ネイピア数) である。電磁波の角振動数  $\omega$  が十分に小さい ( $\omega \ll \sigma/\varepsilon$ ) とき、 $\delta$  を  $\mu, \sigma, \omega$  を用いて表せ。