（令和２年８月２２日実施）

令和 3 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚 (A4)
	問題 II	2 枚 (A4)
解答紙	問題 I	3 枚 (B4)
	問題 II	3 枚 (B4)
草案紙	問題 I, II	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 剛体の運動は、重心の併進運動と重心の周りの回転運動に分離して記述できる。図 1(a) のように、一様な重力の下、長さが a、質量が m の一様な剛体棒が、それぞれ点 P、Q に端を固定された長さ L の 2 本の糸によって吊り下げられている。ここで、点 P と Q の間の距離は a であり、重力加速度を g とする。静止状態の棒に沿って x 軸を、紙面裏に向かって y 軸を、そして鉛直上方に z 軸の正方向を取り、原点 O を棒の重心 G の位置に置くものとする。

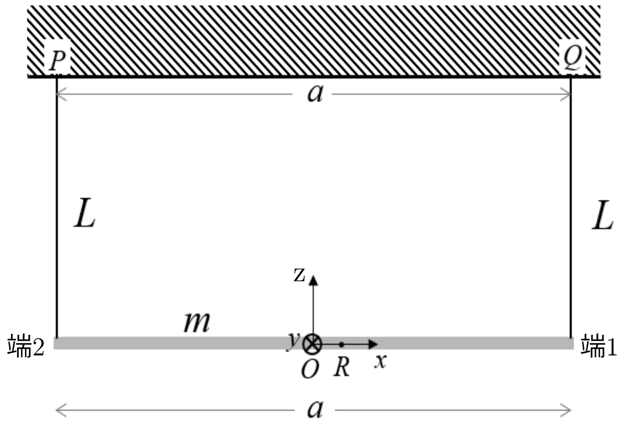


図 1(a)

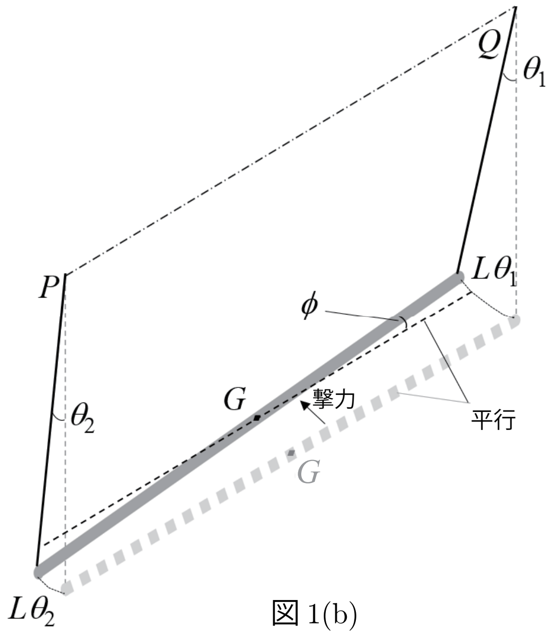


図 1(b)

1-1. この棒の端点を通る鉛直軸周りの慣性モーメント I_E が $\dfrac{1}{3}ma^2$ であることを示せ。

1-2. この棒の重心を通る z 軸周りの慣性モーメント I_G が $\dfrac{1}{12}ma^2$ であることを示せ。

静止状態 [図 1(a)] において、重心から少し離れた棒上の点 R に y 軸正方向の小さな撃力が加えられ、図 1(b) のように、棒の端 1 が鉛直方向から微小角 θ_1、棒の端 2 が同 θ_2 振れたとする。このとき、端 1 、端 2 が描く円弧はそれぞれ、長さ $L\theta_1$、$L\theta_2$ の直線とみなせる。糸は常にピンと張っており、たわむことはないものとする。

1-3. この時の棒の重心の z 方向の変位を求めよ。

1-4. この時、棒は静止時に比べていかほど回転しているか？　この微小回転角を ϕ として、これを θ_1 と θ_2 の一次の項までの関数として求めよ。

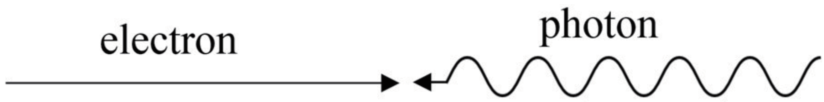
1-5. ラグランジアンを求め、$\Theta_+ \ (= \theta_1 + \theta_2)$ と $\Theta_- \ (= \theta_1 - \theta_2)$ に対する運動方程式を求めよ。

1-6. 基準振動の振動数を求め、単純な振り子の場合と比較して論ぜよ。

棒を静止状態 [図 1(a)] に戻し、その後、端 1 側の糸を切断した。

1-7. 切断直後の端 2 側の糸の張力を求めよ。

問 2 下図のように、電子加速器で生成されたギガエレクトロンボルト（1 GeV=1×10^9 eV）領域の高エネルギー電子とレーザービームの弾性散乱を考える。衝突前の電子の 4 元運動量を p_1、レーザービーム中の光子のそれを p_2 とし、衝突後に電子は p_3、光子は p_4 となったとする。ここで、E をエネルギー、$\vec{p}$ を運動量、c を光速として、4 元運動量 p を $(iE/c, \vec{p})$ と表記するものとすると、$p^2 = -(E/c)^2 + |\vec{p}|^2$ が成り立つ。ここで、電子の静止質量 m は 511 keV/c^2 で与えられ、半導体レーザの光子エネルギーは 1 eV とする。



$$p_1 = \begin{pmatrix} iE_1/c \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} iE_2/c \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

2-1. 衝突前後の 4 元運動量 p_1, p_2, p_3, p_4 の間に成り立つ関係を示し、その意味を述べよ。

2-2. 正面衝突後の光子の最大エネルギーを表す式を導け。ここで、4 元運動量と静止質量の関係 (電子では $p_1^2 = p_3^2 = -m^2c^2$ が成立し、光子ではその質量がゼロ) に注意せよ。

2-3. エネルギー 20 GeV の電子と絞りこまれた半導体レーザビームが衝突するとして上記の光子エネルギーの値を計算し、衝突前の光子エネルギーのおよそ何倍になるか求めよ。

問題 II

問 1 真空中に原点を中心とする内径 s、外径 t の誘電体球殻がある。誘電体球殻内の誘電率は原点からの距離 r に依存しており、$r = s$ で真空の誘電率 ε_0 と一致し、その大きさは傾き $\dfrac{\varepsilon_0}{s}$ で r に比例して増加する。また原点を中心として、それぞれ厚さが無視できる半径 a の導体球殻 A と半径 b の導体球殻 B を置く。図 1(a) に誘電率 ε の変化のようす、図 1(b) に誘電体球殻と導体球殻の位置関係を示す。ここで、$a < s < b < t$ とする。

1-1. 球殻 A に電荷 Q を帯電させたとき、原点から距離 r の位置の電場の大きさ E を求めよ。

1-2. 原点から距離 r の位置の静電ポテンシャル ϕ を求めよ。ただし、無限遠の静電ポテンシャルを 0 とする。

1-3. 球殻 B を接地した。このとき原点から距離 r の位置の電場の大きさ E を求めよ。

1-4. 球殻 A と B を電極としたコンデンサーの電気容量 C を求めよ。

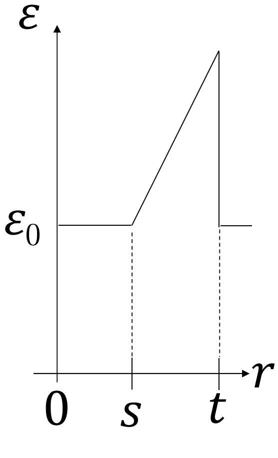


図1(a)

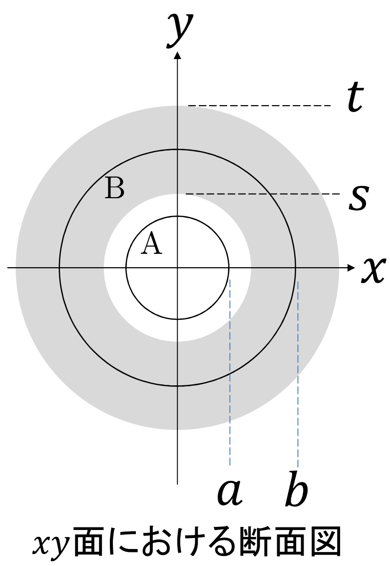


図1(b)

問 2 光を真空中から等方的で透明なガラスへ入射したときの反射と透過について考察する。3 次元空間で $z < 0$ の領域を真空とし、$z \geq 0$ をガラスで満たした。真空の誘電率を ε_0、透磁率を μ_0、ガラスの誘電率を ε、透磁率を μ とする。以下では次式のような平面電磁波について考える。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t},\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H}$ の波数ベクトルと角振動数をそれぞれ $\vec{k},\ \omega$ とした。考える全空間で電荷密度 $\rho = 0$、電流密度 $j = 0$ とする。電磁場は以下のマクスウェルの方程式により記述される。

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0,\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\text{真空中}:\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E},\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H},\ \ \text{ガラス中}:\vec{D} = \varepsilon \vec{E},\ \vec{B} = \mu \vec{H},$$

ここで、$\vec{D}$、$\vec{E}$、$\vec{B}$、$\vec{H}$ はそれぞれ電束密度、電場、磁束密度、磁場である。
必要があれば、$\triangle$ をラプラシアンとして $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\vec{A}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\vec{A}) - \triangle\vec{A}$ なる関係を用いよ。

2-1. 電磁波の電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H}$ が満たす波動方程式をマクスウェルの方程式からそれぞれ導出し、真空中の光の速さ c とガラス中の光の速さ v を誘電率と透磁率を使って示せ。

2-2. 電磁波は $\vec{k}\perp\vec{E}$ と $\vec{k}\perp\vec{H}$ の関係をもつ横波であること示せ。さらに $\vec{k}$、$\vec{E}$、$\vec{H}$ の 3 つのベクトルの向きの関係をマクスウェルの方程式から導き、それを図示せよ。ただし、図は簡単のため $\vec{k} = (0, 0, k)$、$\vec{E}_0 = (E_0, 0, 0)$ として軸を選ぶこと。

2-3. 真空中とガラス中の電磁波について、$|\vec{E}_0|/|\vec{B}_0|$ と光の速さ $c,\ v$ の関係をそれぞれ求めよ。ただし、$|\vec{B}_0|$ は磁束密度の振幅を表す。

ここで真空領域から絶対屈折率 $n = c/v = 1.5$ のガラスへ $\vec{k} = (0, 0, k)$、$\vec{E}_0 = (E_0, 0, 0)$ の平面電磁波を入射した。簡単のためガラス中の透磁率は μ_0 として真空の透磁率に等しいとし、ガラス中の光の吸収は無視できるものとする。

2-4. ガラス面に光が垂直に入射するとき、真空とガラスの境界で入射光の電場 $\vec{E}$、反射光の電場 $\vec{E}_r$、透過光の電場 $\vec{E}_t$ の間に成り立つ境界条件を導け。また同様に入射光磁場 $\vec{H}$、反射光磁場 $\vec{H}_r$、透過光磁場 $\vec{H}_t$ についての境界条件を示せ。

2-5. 電場の振幅反射率 $r =$ (反射光の電場の振幅)/(入射光の電場の振幅) と
振幅透過率 $t =$ (透過光の電場の振幅)/(入射光の電場の振幅) を n を用いて表し、それぞれの値を計算せよ。

2-6. 光の強度に対して反射率 $R =$ (反射光強度)/(入射光強度) の値を求めよ。