（令和元年 8 月 22 日実施）

令和 2 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）: **問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。
  - 惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは**問題 III, IV, V, VI,VII** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	3 枚 (A4)
	問題 IV	2 枚 (A4)
	問題 V	1 枚 (A4)
	問題 VI	3 枚 (A4)
	問題 VII	2 枚 (A4)
解答紙	2 問題分	5 枚 (B4)
草案紙	2 問題分	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 質量 m の粒子が 1 次元デルタ関数ポテンシャル $(-V_0\delta(x), V_0 > 0)$ 中にある。粒子のエネルギーが E（< 0）のとき、粒子の波動関数を $\varphi(x)$ としてシュレディンガー方程式は以下の式で与えられる。粒子の束縛状態について以下の問に答えよ。ただし、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - V_0\delta(x)\varphi(x) = E\varphi(x) \quad (E < 0)$$

1-1. $x \neq 0$ の領域で波動関数が $\varphi(x) = Ce^{-\kappa|x|}$ で表されることを示し、κ を E、m、$\hbar$ を使って表せ。ただし、C（> 0）は規格化定数である。

1-2. ε（> 0）を微小量として、$-\varepsilon < x < \varepsilon$ の範囲でシュレディンガー方程式を積分すると、以下の式が成り立つことを示せ。また、$\varepsilon \to 0$ の極限をとったとき成り立つ式を示せ。

$$\frac{d\varphi(\varepsilon)}{dx} - \frac{d\varphi(-\varepsilon)}{dx} - \frac{2m|E|}{\hbar^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)dx + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\varphi(0) = 0$$

1-3. 束縛状態のエネルギー E、および波動関数の規格化定数 C を V_0、m、$\hbar$ を使って表せ。

1-4. $\varphi(x)$、$\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ をグラフで表示し、それぞれ奇関数か、あるいは偶関数か述べよ。

1-5. $\varphi(x)$ と $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ の対称性から位置座標 x と運動量 p の期待値 $\langle\varphi|\, x \,|\varphi\rangle$、$\langle\varphi|\, p \,|\varphi\rangle$ をそれぞれ求めよ。

1-6. 以下の式で定義される位置座標の分散を計算せよ。

$$\langle\varphi|\,(\Delta x)^2\,|\varphi\rangle = \langle\varphi|\,x^2\,|\varphi\rangle - \langle\varphi|\,x\,|\varphi\rangle^2$$

1-7. 以下の式で定義される運動量の分散を計算せよ。

$$\langle\varphi|\,(\Delta p)^2\,|\varphi\rangle = \langle\varphi|\,p^2\,|\varphi\rangle - \langle\varphi|\,p\,|\varphi\rangle^2$$

1-8. 位置と運動量の不確定積 $\langle\varphi|\,(\Delta x)^2\,|\varphi\rangle\langle\varphi|\,(\Delta p)^2\,|\varphi\rangle$ を計算せよ。

問 2 水素原子の $2p$ 軌道に電子が入るときを仮想的に考え、その軌道の電子による磁性を調べる。水素原子の波動関数は主量子数 n 、方位量子数 l、磁気量子数 m で指定され、極座標表示で以下の式で表すことができる。

$$\varphi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi) = R_{nl}(r)C_{lm}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$$

ここで、$R_{nl}(r)$ と $Y_l^m(\theta,\phi)$ は動径波動関数と球面調和関数であり、C_{lm} は規格化定数、$P_l^{|m|}(\cos\theta)$ はルジャンドル陪関数である。また i は虚数単位である。一方、電子の存在確率の流れ $\vec{j}$ は波動関数 φ を使って、$\vec{j} = \dfrac{\hbar}{2im_e}(\varphi^*\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\varphi^*)$ で定義される。ここで、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの、m_e は電子の質量である。また極座標表示での微分演算子は以下の式となる。

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

ここで $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$、$\vec{e}_\phi$ はそれぞれ r（動径)、θ（極角)、ϕ（方位角）方向の単位ベクトルである。以下の問に答えよ。

2-1. $R_{nl}(r)$ が実関数であることを使って、確率の流れの r 成分 j_r を計算せよ。

2-2. $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ が実関数であることを使って、確率の流れの θ 成分 j_θ を計算せよ。

2-3. 確率の流れの ϕ 成分 j_ϕ を計算し、j_ϕ が磁気量子数 m に比例し、また ϕ に依存しないことを示せ。

次に前問より磁気量子数 m がゼロでないとき、$j_\phi \neq 0$ となるので、z 軸周りに電荷の流れが存在する。この場合、$m \neq 0$ よりこの軌道は z 軸方向の磁気モーメントの成分 μ_z を持つことになる。この μ_z を z 軸周りの電流から以下の問にしたがって計算する。 ただし、電子のスピンによる磁性は無視する。

2-4. 図 1 で示した動径 r、極角 θ の位置での微小断面積 $rdrd\theta$ を z 軸周りに回転してできた灰色の領域の円電流を考える。この円電流よって z 軸方向に誘起される微小磁気モーメントの成分 $d\mu_z$ は（円電流）×（円の面積）で求めることができる。$d\mu_z$ を j_ϕ と電子の電荷 $q_e(< 0)$ を用いて表せ。

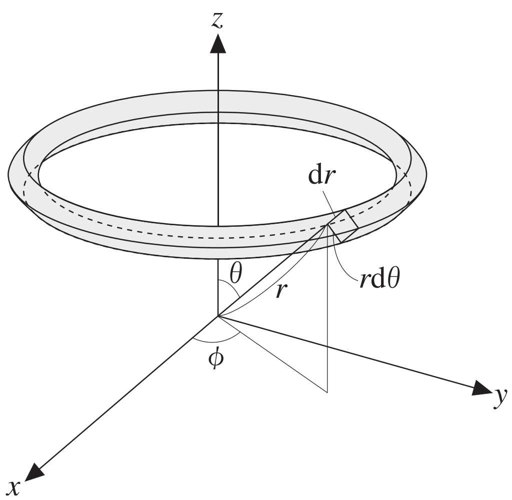

図 1

2-5. 波動関数が以下の式で表される φ_{211}（$m = 1$ の $2p$ 軌道）の場合、前問で求めた z 軸方向に誘起する微小磁気モーメント $d\mu_z$ を r と θ で積分して、$\mu_z = -\dfrac{\hbar|q_e|}{2m_e} = -\mu_\mathrm{B}$ となることを示せ。ただし、μ_B はボーア磁子である。

$$\varphi_{211} = R_{21}(r)Y_1^1(\theta,\phi) = -\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$$

ここで、a_0 はボーア半径である。また計算では以下の定積分を使って良い。

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}, \quad \int_0^\infty x^4 e^{-x}dx = 24$$

2-6. 波動関数が φ_{21-1}（$m = -1$ の $2p$ 軌道）の場合、前問と同様に j_ϕ が m に比例することを使って z 軸方向に誘起する磁気モーメントの成分 μ_z を μ_B を単位として求めよ。

問題 IV

問 1 図 1 のような気体の入った容器 A と容器 B がある。それぞれの容器にはおもりをつけることにより容器内の圧力を p_{A}、p_{B}（$p_{\mathrm{A}} > p_{\mathrm{B}}$）に保つ。この容器の間をグラスウールの詰まった管でつなぎ容器 A の気体を容器 B にゆっくりと噴出させる。ここで気体定数を R とする。

1-1. 容器 A の気体の 1mol（体積 V_{A}）が管を通して容器 B に噴出した。その時の体積を V_{B} とする。この過程で移動した気体のエンタルピー H が変化しないことを示せ。

この過程で容器 A での気体の温度 T_{A} と容器 B に噴き出すときの温度 T_{B} との差 $T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{B}}$ と圧力差 $p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}}$ の関係は、ジュール・トムソン係数 $\mu_{\mathrm{J}} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_H$ を調べればわかる。

1-2. μ_{J} は、定圧熱膨張率 $\beta = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ を用いて以下のように書ける。

$$\mu_{\mathrm{J}} = K\left(\beta T - 1\right)$$

このときの K を定圧モル比熱 c_p とモル体積 V_{M} を用いて表せ。必要ならば以下の関係式を用いてよい。ただし S はエントロピーとする。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial H}\right)_T = -1, \ \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

1-3. 理想気体の場合、容器 B に噴出するとき、気体の温度がどのようになるか答えよ。

1-4. 以下の状態方程式に従うファンデルワールス気体において $\mu_{\mathrm{J}} = 0$ となる温度を求めよ。

$$p = \frac{RT}{V_{\mathrm{M}} - b} - \frac{a}{V_{\mathrm{M}}^2} \qquad (a > 0, b > 0)$$

1-5. 容器 A での気体の温度 T_{A} が上記の温度より高温だった場合と、低温だった場合、それぞれについて噴出する気体の温度がどのように変化するか述べよ。

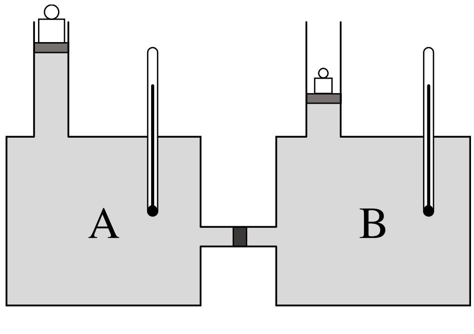

図 1

問 2 エネルギー準位が $+\varepsilon$、$-\varepsilon$ の 2 準位系を考える。粒子数を N、全体のエネルギーを E とする。

2-1. $+\varepsilon$、$-\varepsilon$ の準位の粒子数 $N_+(>0)$、$N_-(>0)$ を ε、N そして E を用いて表せ。

2-2. 近似式 $\ln N! \approx N\ln N - N$ を用いてエントロピーを計算せよ。ここでボルツマン定数を k_B とする。

2-3. 平衡状態で系のエネルギー E が温度 T を用いて下の式となることを導け。

$$E = \varepsilon N \frac{\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{k_B T}\right) - 1}{\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{k_B T}\right) + 1}$$

2-4. この 2 準位系の定積熱容量 C_V を求めよ。

問 3 エントロピーの概念は、科学の広い分野に応用されている。その 1 つに情報エントロピーがある。ありふれた事象の情報量は少なく、めったにない事象の情報量は多いと考えられる。ある事象 x を観測する確率分布を $p(x)$ とした時、情報量 $h(x)$ は以下の性質をもつ。

- $p(x)$ に対して正の単調減少関数
- 無関係な 2 つの事象 x、y を観測したときの情報量はそれぞれの情報量の和 $h(x,y) = h(x) + h(y)$ となる

3-1. $h(x) = -\ln p(x)$ が上記の条件を満たしていることを示せ。

次に、サイコロの目のように事象 x_i が離散的である場合の情報エントロピー H を情報量の期待値として以下のように定義する。このエントロピーはシャノンのエントロピーと呼ばれ統計力学でのギブスエントロピーと定数倍を除いて一致する。

$$H = -\sum_i p(x_i) \ln p(x_i)$$

最も確からしい確率分布は、情報エントロピーを最大にするものとして決定される。

3-2. 確率変数が $x_i (i = 1, \cdots, N)$ の離散系での最も確からしい確率分布 $p(x_i)$ を求めよ。

3-3. 次に確率変数が連続の場合を考える。情報エントロピーを連続の場合に拡張し、一次モーメントと二次モーメントが以下で与えられるとき、最も確からしい確率分布 $p(x)$ を求めよ。ここで B は正の定数とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = B^2$$

必要ならば α を正の定数とした場合の以下の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$