（平成 30 年 8 月 20 日実施）

平成 31 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）: **問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。
  - 惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは**問題 III, IV, V, VI,VII** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	3 枚 (A4)
	問題 IV	2 枚 (A4)
	問題 V	2 枚 (A4)
	問題 VI	6 枚 (A4)
	問題 VII	3 枚 (A4)
解答紙	2 問題分	6 枚 (B4)（各問題 3 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 III

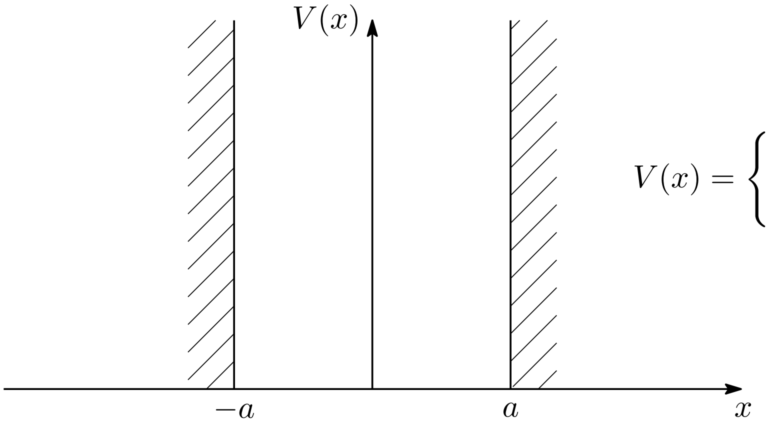
以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 質量 m の粒子が 1 次元のポテンシャル $V(x)$ 中にあるときの束縛状態について、以下の問に答えよ。ただし、プランク定数を $\hbar$ で表す。

1-1. ポテンシャル $V(x)$ が連続関数であるとき、束縛状態のエネルギー固有値 E は縮退していないことを示せ。

1-2. **1-1** のポテンシャルが $V(x) = V(-x)$ を満たす偶関数のとき、エネルギーの固有関数は偶関数か奇関数のいずれかになることを示せ。

1-3. ポテンシャル $V(x)$ が図 1 のような無限に深い 1 次元井戸型ポテンシャルであるとき、n 番目のエネルギー固有値 E_n と E_n に対応する規格化された固有関数 $\psi_n(x)$ を求めよ。ただし、基底状態を $n = 1$ とする。



$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| \geq a \\ 0 & |x| < a \end{cases}$$

図 1

1-4. この系に摂動ポテンシャル $\lambda V_1(x) = \lambda x$ を加え、$V(x) = V_0(x) + \lambda V_1(x)$ とする。このとき、n 番目のエネルギー固有値の変化 ΔE_n は λ の 2 次以上の量となることを示せ。

1-5. この系に時間に依存する摂動ポテンシャル $\lambda V_2(x,t)$ を加え $V(x) = V_0(x) + \lambda V_2(x,t)$ とする。このときの波動関数 $\psi(x,t)$ を摂動がないときの固有関数で展開し

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) e^{-iE_n t/\hbar}\, \psi_n(x)$$

と表す。λ が小さいとき、$C_n(t)$ が

$$C_n(t) = C_n^{(0)}(t) + \lambda C_n^{(1)}(t) + O(\lambda^2)$$

のように λ のべきで展開できるとすると $C_n^{(0)}, C_n^{(1)}$ は次の方程式を満たすことを示せ。

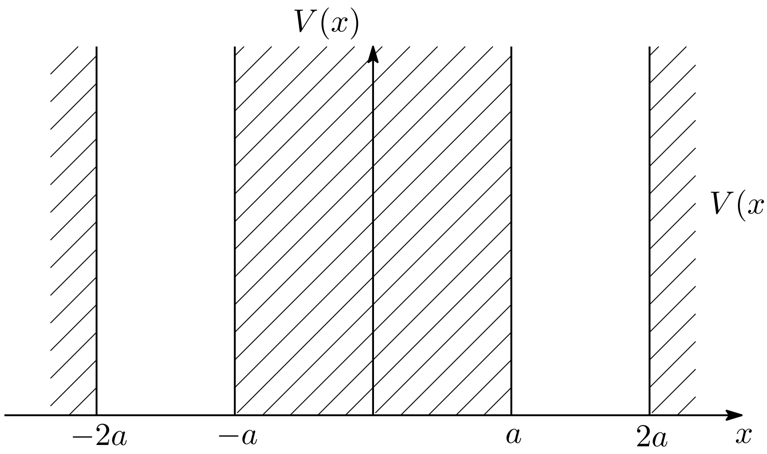
$$i\hbar \frac{\mathrm{d}C_n^{(0)}}{\mathrm{d}t} = 0,$$
$$i\hbar \frac{\mathrm{d}C_n^{(1)}}{\mathrm{d}t} = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(0)} \int_{-a}^{a} \psi_n^*(x) V_2(x,t) \psi_l(x) \mathrm{d}x \, e^{i(E_n - E_l)t/\hbar}.$$

1-6. **1-5** の摂動ポテンシャルが $t = 0$ に加えられ、

$$V_2(x,t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ xe^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases}$$

のように変化する場合を考える。$t = 0$ で基底状態にあるとき、$t \to \infty$ で第一励起状態 ψ_2 になる確率を求めよ。

1-7. 次にポテンシャル $V(x)$ が図 2 のような 2 つの無限に深い 1 次元井戸型ポテンシャルである場合を考える。このときの基底状態のエネルギーと固有関数を求めよ。ただし、固有関数の規格化はしなくてよい。また、得られた結果について、**1-1**、**1-2** で示された性質との関係について考察を記せ。



$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| \geq 2a, |x| \leq a \\ 0 & a < |x| < 2a \end{cases}$$

図 2

問 2 ポジトロニウムはスピン $\dfrac{1}{2}$ をもつ電子と陽電子の束縛状態であり、水素原子の陽子の質量を電子の質量と等しくした原子に相当する。陽電子は電子の反粒子であるため対消滅して崩壊する不安定な原子であるが、ここでは安定した原子として扱う。ポジトロニウムの $1s$ 状態（水素原子の基底状態に対応する状態）における異なるスピンの状態について以下の設問に答えよ。ただし、電子と陽電子のスピン状態 $(|\uparrow\rangle_e, |\downarrow\rangle_e)$, $(|\uparrow\rangle_p, |\downarrow\rangle_p)$ を次のようにそれぞれのスピン演算子 $\hat{\boldsymbol{S}}_e, \hat{\boldsymbol{S}}_p$ の z 成分の固有状態に取る。

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_{az}|\uparrow\rangle_a = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle_a, \quad \hat{S}_{az}|\downarrow\rangle_a = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle_a, \quad a = e, p, \\
&\hat{S}_{a-}|\uparrow\rangle_a = |\downarrow\rangle_a, \quad \hat{S}_{a+}|\uparrow\rangle_a = 0, \quad \hat{S}_{a\pm} \equiv \hat{S}_{ax} \pm i\hat{S}_{ay}, \\
&\hat{S}_{a+}|\downarrow\rangle_a = |\uparrow\rangle_a, \quad \hat{S}_{a-}|\downarrow\rangle_a = 0.
\end{aligned}$$

2-1. 全スピン演算子 $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}}_e + \hat{\boldsymbol{S}}_p$ に対して、$\hat{\boldsymbol{S}}^2$ と $\hat{S}_z$ が可換であることを示せ。

2-2. $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ と $\hat{S}_z$ のすべての同時固有状態を $|\uparrow\rangle_e|\uparrow\rangle_p$, $|\uparrow\rangle_e|\downarrow\rangle_p$, $|\downarrow\rangle_e|\uparrow\rangle_p$, $|\downarrow\rangle_e|\downarrow\rangle_p$ から作り、規格化された固有状態と対応する固有値を答えよ。

2-3. 電子と陽電子の磁気双極子モーメントはスピン演算子に比例し、電子と陽電子の電荷が逆符号であるため $\hat{\boldsymbol{\mu}}_e = -A\hat{\boldsymbol{S}}_e$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_p = A\hat{\boldsymbol{S}}_p$ と表される。電子と陽電子間に磁気双極子モーメントによる相互作用 $\hat{H}_m = -C\hat{\boldsymbol{\mu}}_e \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_p$ が働くとし、この相互作用による $1s$ 状態のエネルギーの変化を求めよ。ただし、C は定数としてよい。

2-4. ポジトロニウムを z 軸の正方向を向く大きさ B の一様な磁場中に置くと、磁気双極子モーメントとの相互作用により

$$\hat{H}_B = -\boldsymbol{B} \cdot (\hat{\boldsymbol{\mu}}_e + \hat{\boldsymbol{\mu}}_p) = -B(\hat{\mu}_{ez} + \hat{\mu}_{pz})$$

が加わる。 $1s$ 状態で $\hat{H}_m + \hat{H}_B$ がもつすべての固有値（2 つの相互作用による $1s$ 状態のエネルギーの変化）を求めよ。

問題 IV

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 有効数字を二桁として、以下の問に答えよ。ただし、(P, V, T) はそれぞれ圧力、体積、絶対温度を表し、R は気体定数、また、1 cal = 4.2 J である。

1-1. 水 100 g を入れた断熱容器の水中に羽根車が設置されている。この羽根車を、質量 1.0 kg の重りを 1.0 m 落下させて回した。この時、水温は何 K 上昇するか。ただし、重力加速度を 9.8 m/s^2、水の比熱を 1.0 cal/g·K とする。

1-2. 状態方程式 $PV = nRT$ に従う n モルの理想気体がある。その温度 T を一定に保ちながら、体積を V_1 から V_2 に変化させた。この時、気体が外部にした仕事の表式を求めよ。

1-3. 15°C と 100°C の 2 つの熱源で動作する熱機関の最大効率はいくらか。

1-4. 1 気圧 100°C で 100 g の水が、沸騰して水蒸気になった。この時のエントロピー変化を求めよ。ただし 1 気圧 100°C での水の蒸発熱は 540 cal/g である。

1-5. 熱力学第一法則と第二法則に基づき、n モルの気体のエントロピーと内部エネルギーの微小変化 $(\mathrm{d}S, \mathrm{d}U)$ が、(T, V) を独立変数として、それぞれ

$$\mathrm{d}S = \frac{nC_V}{T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V, \tag{1a}$$

$$\mathrm{d}U = nC_V \mathrm{d}T + \left\{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right\}\mathrm{d}V, \tag{1b}$$

と表せることを示せ。ただし、C_V は定積モル比熱である。

1-6. 定積モル比熱が $C_V = aT$ (a は正の定数)のように温度に比例し、状態方程式 $PV = nRT$ に従う理想気体がある。(1) 式と熱力学第三法則を用いて、この気体のエントロピーと内部エネルギーの表式を求めよ。

1-7. 粒子数 N も独立変数に加えたギブス自由エネルギー $G(T, P, N)$ が、化学ポテンシャル

$$\mu \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{T,P}$$

を用いて、$G = \mu N$ と表せることを示せ。

1-8. ファンデルワールスの状態方程式

$$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

に従う n モルの気体がある。ただし、(a, b) は正の定数である。この気体の臨界点での圧力 P_c、体積 V_c、温度 T_c を求めよ。

問 2 以下の問に答えよ。

2-1. 同種粒子 N 個からなる理想気体がある。系の全エネルギー E と全粒子数 N を、一粒子状態のエネルギー ε_q とその占有数 n_q を用いて表せ。ただし、q は一粒子状態を指定する量子数である。

2-2. ボーズ粒子、フェルミ粒子の区別と、粒子のスピンの大きさとの関係を述べよ。

2-3. ボーズ粒子系とフェルミ粒子系のそれぞれにおいて、**2-1** の占有数 n_q としてどのような値が許されるか。

2-4. 以上の結果を用いて、同種粒子からなる理想気体の大分配関数 Z_G が、次のように表せることを示せ。

$$Z_\mathrm{G} = \prod_q \left\{1 - \sigma e^{-\beta(\varepsilon_q - \mu)}\right\}^{-\sigma}, \qquad \sigma = \begin{cases} +1 & \text{：ボーズ粒子} \\ -1 & \text{：フェルミ粒子} \end{cases}. \tag{2}$$

ただし、$\beta \equiv 1/k_\mathrm{B}T,\ k_\mathrm{B}$ はボルツマン定数、T は絶対温度、μ は化学ポテンシャルである。

2-5. (2) 式より、粒子数期待値 $\bar{N}$ と内部エネルギー U が、それぞれ次のように表せることを示せ。

$$\bar{N} = \sum_q \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_q - \mu)} - \sigma}, \qquad U = \sum_q \frac{\varepsilon_q}{e^{\beta(\varepsilon_q - \mu)} - \sigma}. \tag{3}$$

2-6. 光子のエネルギーは、波数ベクトル $\boldsymbol{k} = \dfrac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ （$n_x,\ n_y,\ n_z$ は整数)、光速 c、プランク定数 $\hbar \equiv 1.05 \times 10^{-34}$ J·s を用いて、

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar c |\boldsymbol{k}|$$

と表せる。また、同じ $\boldsymbol{k}$ を持つ光子の自由度は 2 である。以上より、光子の状態密度 $D(\epsilon) \equiv 2\sum_{\boldsymbol{k}} \delta(\epsilon - \varepsilon_{\boldsymbol{k}})$ が、

$$D(\epsilon) = \frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3}\epsilon^2\,\theta(\epsilon) \tag{4}$$

と表せることを示せ。ただし、$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数、$V = L^3$ は系の体積、$\theta(x)$ は $x \geq 0$ と $x < 0$ でそれぞれ 1 と 0 の値を持つ階段関数である。

2-7. 光子気体の化学ポテンシャル μ を求めよ。

2-8. (3) 式と (4) 式を用いて、光子気体の内部エネルギー U が、

$$U = \frac{\pi^2 k_\mathrm{B}^4}{15(\hbar c)^3} V T^4$$

と表せることを示せ。ただし、積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$ の関係を用いて良い。