（平成 30 年 8 月 20 日実施）

平成 31 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚 (A4)
	問題 II	3 枚 (A4)
解答紙	問題 I	3 枚 (B4)
	問題 II	3 枚 (B4)
草案紙	問題 I, II	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 I

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 図 1 のように、固定端にばねでつながれた質点の運動を考える。質点の質量を m、ばね定数を $k(>0)$ とする。ばねが自然長のときの質点の位置を原点とし、ばねの伸びる方向を x 軸にとる。ばねはフックの法則に従うとし、以下の問に答えよ。

1-1. 抵抗力 $-b\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ が働く場合の質点に対する運動方程式を求めよ。ただし、$b>0$ で、t は時間とする。

1-2. $x=e^{\lambda t}$ とおいて一般解を求め、質点の運動について記述せよ。具体的にはパラメータ $\gamma \equiv \dfrac{b}{2m}$ が i) $\gamma > \sqrt{\dfrac{k}{m}}$、ii) $\gamma < \sqrt{\dfrac{k}{m}}$、iii) $\gamma = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の場合に分けて考察せよ。

1-3. さらに、外部から振動的な力 $F(t)=F_0\cos\omega t$ が加えられる場合を考える。このときの運動方程式を求めよ。

1-4. **1-3** において時間が十分経過し、定常的になった状態での質点の運動について考える。$F(t)$ と $x(t)$ を、複素数 $\tilde{F}(t)=F_0e^{i\omega t}$ および $\tilde{x}(t)=x_0e^{i\omega t}$ と拡張して、定常解 $x(t)$ を求めよ。x_0 は時間に依存しない複素数とする。

1-5. **1-4** で得られた質点の運動について $\left|\dfrac{x_0}{F_0}\right|^2$ の ω 依存性の概形を示せ。ただし、$\gamma < \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ とする。

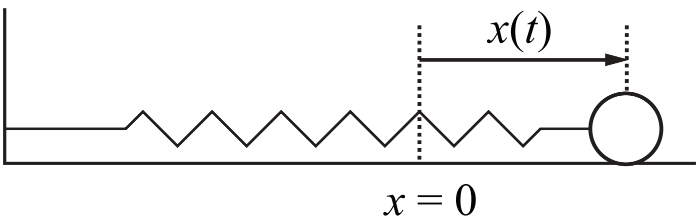

図 1

問 2 以下の問に答えよ。

2-1. 図 2(a) のように慣性系に対して原点 O を通る直線を回転軸として角速度 ω で回転している回転座標系を考える。角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は回転軸上で回転により右ねじの進行方向を持つ大きさ ω のベクトルとする。回転座標系に固定された点 P の運動を慣性系でみると、点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は Δt 秒後に $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ となる。このとき慣性系からみた $\boldsymbol{r}$ の時間変化が $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ となることを示せ。

2-2. 次に、この Δt の間に点 P からみて $\Delta^* \boldsymbol{r}$ だけ変移した質点の運動を考える。慣性系からみたとき、質点の速度が $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ となることを示せ。ここで $\dfrac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}$ は回転座標系における時間微分とする。

2-3. **2-2** の関係式は、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に限らず任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して成り立つ。慣性系からみて力 $\boldsymbol{F}$ が働いている質量 m の物体について、回転座標系での運動方程式を求めよ。

2-4. 地球は角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ をもって自転しているため、地球表面での運動は回転座標系で考える必要がある。図 2(b) に示すような、北極点における振り子の運動について考える。長さ l の糸でつりさげられた質量 m の質点の地表面における微小振動は

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}x + \alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}y + \beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

と表すことができる。**2-3** の結果を用いて、係数 $\alpha,\ \beta$ を求めよ。ただし、g は地表面での重力加速度、$x,\ y$ は地表面に固定した直交座標であり、x 方向、y 方向は $\boldsymbol{\omega}$ ベクトルと右手系をなす。

2-5. **2-4** で得られた運動方程式から積分定数を c とすると $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega(x^2+y^2)+c$ が得られる。平衡点からずらした位置より初速度 0 で質点を離し振動をスタートさせた。ϕ を振り子の振動面と x 軸のなす角とし、極座標 (u,ϕ) を用いて $x = u\cos\phi,\ y = u\sin\phi$ としたとき、$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ を求め、得られた結果の意味を説明せよ。

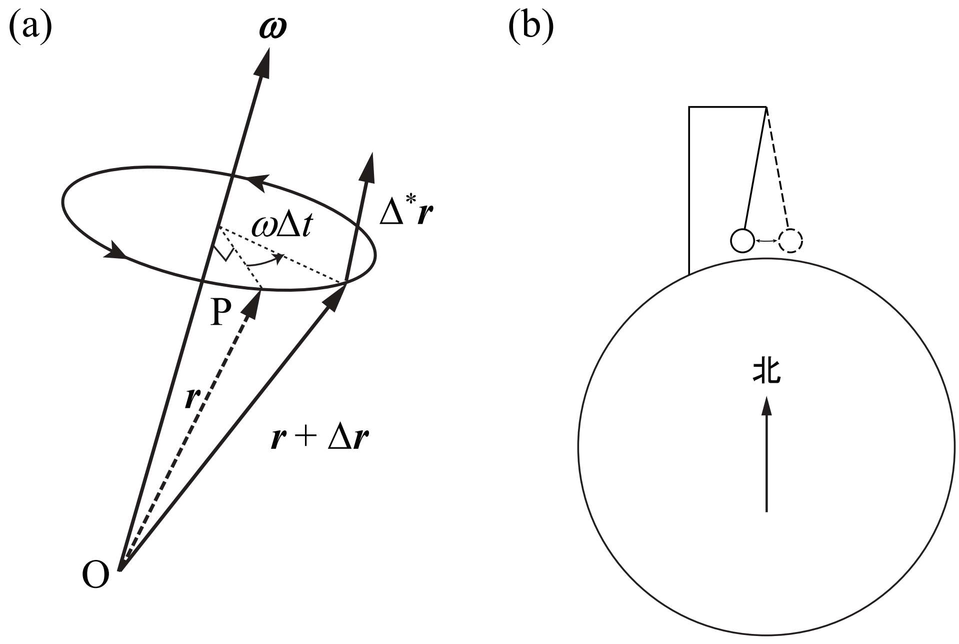

図 2

問題 II

以下の問 1 から問 3 までの全ての設問に答えよ。

問 1 真空中に、図 1 のような半径 a の導体円柱と半径 b の導体円筒が同軸で配置されたコンデンサーがある。コンデンサーの長さは c で、両端の電場の乱れは無視する。真空の誘電率を ε_0 として以下の問に答えよ。

1-1. 一般に、導体に電荷を与えたとき電荷はその表面にのみ分布する。この理由を説明せよ。

1-2. 導体円柱に $+Q$、導体円筒に $-Q$ の電荷を与えたとき、中心軸から r $(a < r < b)$ の距離における電場の大きさ $E(r)$ と方向を求めよ。

1-3. 導体間の電位差を計算して、コンデンサーの静電容量 C を求めよ。

1-4. 両方の導体の電荷が 0 の状態から始めて、円筒から円柱へとゆっくりと電荷を移動させ、それぞれの導体の電荷が $-Q$, $+Q$ の状態にした。このときに、必要な仕事を求めよ。

1-5. 次に、導体円柱と導体円筒の電荷を保ったまま、導体間に誘電率 ε の誘電体を挿入したところ電場は $\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E(r)$ へと変化した。これは、誘電体に発生した分極電荷の影響と考えられる。導体円柱に接した誘電体の内壁に発生した分極電荷の総量 Q_d を、Q, ε_0, ε を用いて表せ。

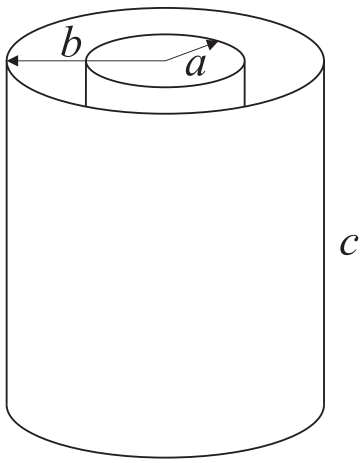

図 1

問 2 真空中に、図 2 のような半径 r で導線を N 回巻いた長さ l のソレノイドがある。ソレノイド内部の磁場は一様であるとして以下の問に答えよ。ただし、真空の透磁率を μ_0 とする。

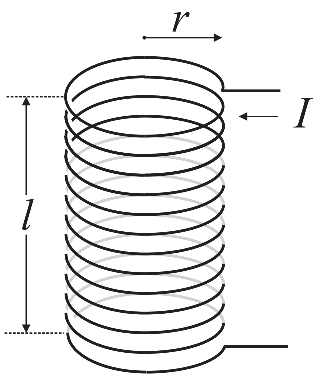

図 2

2-1. 導線に電流 I が流れているとき、アンペールの法則を用いてソレノイド内部の磁束密度の大きさ B を求めよ。

2-2. このソレノイドを貫く全磁束より、自己インダクタンス L を求めよ。

2-3. ソレノイドの逆起電力に抗して、電流を 0 から I まで増加させるのに必要な仕事を求めよ。

2-4. **2-3** で求めた仕事と、全磁場エネルギーを比較せよ。磁場のエネルギー密度は $\dfrac{B^2}{2\mu_0}$ とする。

2-5. 導線の電気抵抗を 0 として導線の両端を接続すると電流を永久に流し続けることができる。この状態からソレノイドの長さ l を仮想変位させたときの磁場エネルギーの変化より、ソレノイドの両面に作用する Maxwell 応力の大きさと向きを求めよ。ただし、仮想変位は磁束一定（起電力＝ 0）の条件で行うものとする。

問 3 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は、電磁場ポテンシャル ϕ と $\boldsymbol{A}$ を用いて $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ および $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ と表すことができる。ε_0 と μ_0 をそれぞれ、真空の誘電率と透磁率として、次の問に答えよ。

3-1. この電場と磁場の定義より、2 つの Maxwell 方程式、$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0,\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ が導かれることを示しなさい。

この定義を、電荷と電流の存在しない場合の残り 2 つの Maxwell 方程式 $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0,\ \dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ に代入し、ローレンツ条件 $\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ を用いると、2 つの波動方程式 $(\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2}{\partial t^2})\phi = 0,\ (\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2}{\partial t^2})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ が導かれる。ここで、適当なゲージ変換を用いるとスカラーポテンシャル ϕ を 0 とすることができ、$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ のベクトルポテンシャルだけで、電磁波を表すことができる。

3-2. 平面波のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$ を考える。波動方程式より電磁波の速度を求めよ。

3-3. この波が横波であることを示せ。

3-4. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ を求めよ。

3-5. この電磁波に関してポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \overline{\boldsymbol{E} \times \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}}$ をエネルギー密度 $u = \dfrac{\varepsilon_0 \overline{E^2}}{2} + \dfrac{\overline{B^2}}{2\mu_0}$ を用いて表し、その物理的意味を説明せよ。ただし、上線は時間平均を表す。