

(平成 23 年 8 月 17 日実施)

平成 24 年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間： 9:00～11:30（2 時間 30 分）
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入すること。ただし、氏名は記入しないこと。
- 解答の際、途中の問いが解けない場合でも問題文に記されている結果等を使って、それ以降の問いを解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出すること。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも、**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは以下である。

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	2 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1、問 2 の設問に解答せよ。解答にあたっては結果だけでなく導出過程も記すこと。

問 1 図 1 および図 2 のように、質量 M 、長さ L の棒の一端がちょうつがいで支持され、自由に回転できるようになっている。この棒に沿って、質量 m の円環がなめらかに滑り動く系を考える。円環は質量の無いバネ定数 k のバネでちょうつがいと結ばれている。棒の太さは無視できるとし、重力加速度を g とし、以下の問いに答えよ。

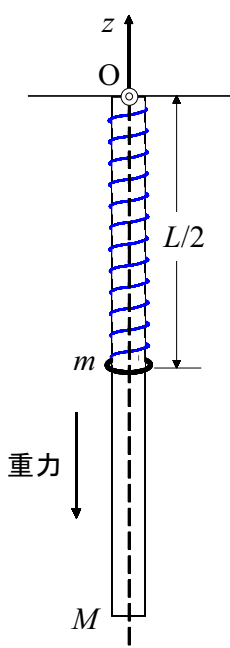


図 1

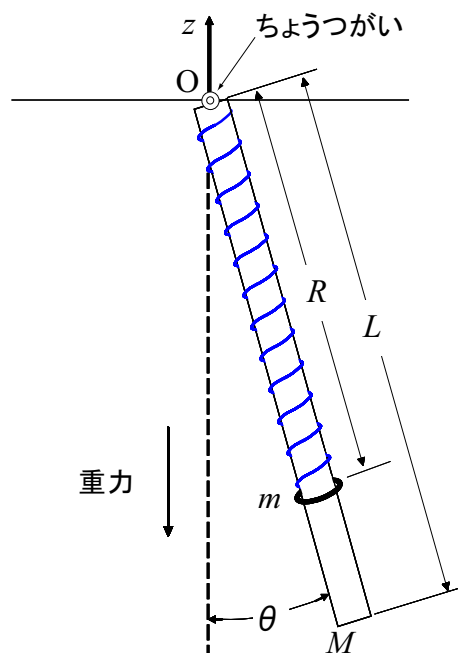


図 2

1-1. 図 1 に示すように棒が静止した状態で、円環は棒の中心に静止した。バネの自然長を求めよ。

次に、図 2 に示すように、重力のもとでこの系を鉛直面内で運動させる。ちょうつがいの位置を原点 O とし、鉛直上向きに z 軸を取る。棒と z 軸がなす角を θ とし、バネの長さを R とする。以下の問いに答えよ。

1-2. 原点 O の周りの棒の慣性モーメント I は、 $I = \frac{1}{3}ML^2$ で与えられることを示せ。

1-3. この系のラグランジアンを、 R と θ の関数として示せ。

1-4. R と θ に関する運動方程式を求めよ。

1-5. 微小振動の極限 ($|R - \frac{L}{2}| \equiv \Delta R \ll \frac{L}{2}$, $\theta \ll 1$, $\dot{\theta} \approx 0$) における、バネの伸び縮みの振動数を求めよ。

問 2 ニュートンの万有引力説によると、太陽による万有引力のポテンシャルは、球対称を仮定して

$$\phi = -\frac{GM}{r}$$

である。ここで、 M は太陽の質量、 r は太陽の中心からの距離、 G は万有引力定数で $G = 6.67 \times 10^{-11} [\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$ である。以下の問いに答えよ。

2-1. 質量 m の質点がこのポテンシャルの中を動くものとする。正規直交座標系において、この質点の運動方程式を求めよ。

2-2. 2-1. で求めた運動方程式の左辺と右辺の次元が一致することを示せ。

2-3. アインシュタインの一般相対性理論を考慮すると、ニュートンの説は修正されなければならない。最低次の補正項を考慮すると、万有引力ポテンシャルは

$$\phi = -\frac{GM}{r} - \frac{A}{r^2}$$

と書ける。次元解析の方法により、次元を持たない定数を除いて、係数 A の表式を推測せよ。補正項は G, M の他に光速 c を含む。

2-4. 2-3. の次元を持たない定数は 1 のオーダーの量であることが分かっている。太陽の質量 $M = 2.0 \times 10^{30} [\text{kg}]$ として、地球の位置 $r = 1.5 \times 10^{11} [\text{m}]$ における補正項の (ニュートン項に対する) 相対的な大きさを有効数字一桁で求めよ。但し、 $c = 3.0 \times 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$ とする。

問題 II

問 1 から問 3 の設問に解答せよ。

問 1 静電場中におかれた静電平衡にある導体の一般的な性質として次のようなものがある。その理由を説明せよ。

1-1. 導体中の電場はゼロである。

1-2. 導体中の電荷密度はゼロである。

1-3. 導体内は等電位である。

1-4. 導体表面の電場は、表面に垂直である。

1-5. 導体表面の電荷密度を σ とし、その面に垂直な方向の単位ベクトルを $\hat{\mathbf{n}}$ とすると電場 \mathbf{E} は、 $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$ となる。

1-6. 導体表面の微小面 ΔS の電荷密度を σ とし、その面に垂直な方向の単位ベクトルを $\hat{\mathbf{n}}$ とすると微小面にある電荷に働く力は $\Delta \mathbf{F} = \frac{\sigma^2 \Delta S}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$ である。

問 2 図 1 のように長さが l で、軸を共通にした半径 a の内部導体と厚さが無視できる半径 b の外部導体があり、それらの間には誘電体が挿入されている。長さ l は a, b に比べて非常に大きい。このような形状のものを同軸ケーブルという。いま、この同軸ケーブルの一端には電位差 V の直流電源が、他端には電気抵抗 R の抵抗器が接続されている。内部導体と外部導体は共に電気抵抗が無視できる完全導体であり、誘電体の誘電率と透磁率は真空における値 (ϵ_0, μ_0) と等しいとする。内部導体には一様に電流が流れるものとして、 $r < a, a < r < b, r > b$ の 3つの領域における磁束密度をそれぞれ求めよ。ただし $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{z}}$ は円筒座標系での単位ベクトルであり、以下、方向を指定するのにを用いよ。

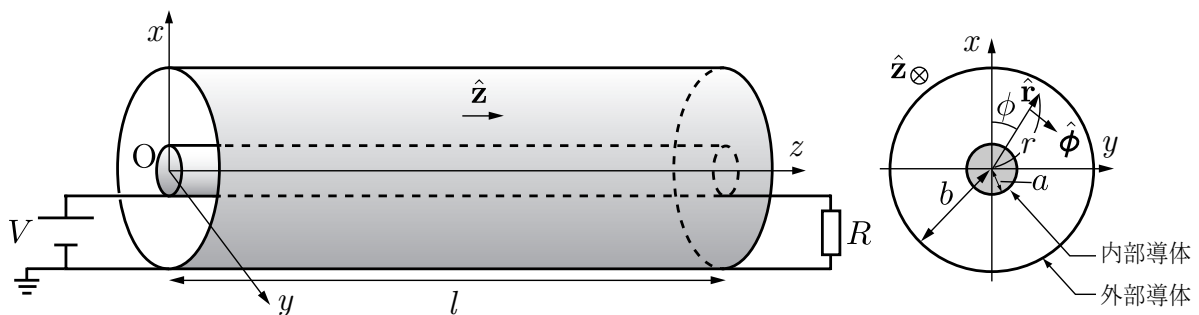


図 1

問 3 図 2 のように、**問 2** と同じ同軸ケーブルの $z = 0$ の点に $V = V_0 \cos \omega t$ である角振動数 ω の交流電源を接続する。もう一端を他の回路に接続するが、その影響は無視できるものとする。同軸ケーブルの内部導体と外部導体がたとえ完全导体であっても、交流では電磁誘導や変位電流のために特性インピーダンス (交流での電気抵抗) が発生する。同軸ケーブル内部 ($a < r < b$) の位置 \mathbf{P} における電場、磁束密度は

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}, t) = \hat{\mathbf{r}} E_r(r) \cos(kz - \omega t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{P}, t) = \hat{\phi} B_\phi(r) \cos(kz - \omega t)$$

であるとする。また、内部導体の $r < a$ の部分では電場、磁場は共にゼロであり、交流電流は $r = a$ の表面のみを流れるとする (表皮効果)。必要に応じて円筒座標における次の公式を用いて、以下の問いに答えよ。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right)$$

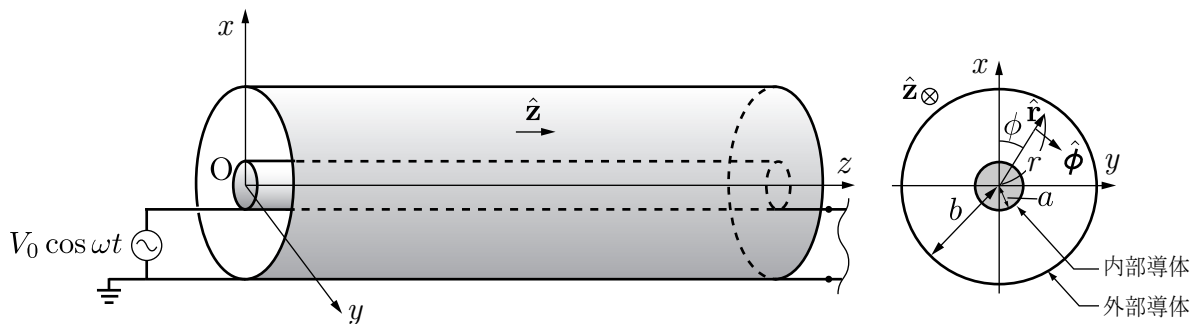


図 2

- 3-1.** ガウスの法則 (微分形) を用いて、 $a < r < b$ で $E_r(r) = \frac{V_0}{r \ln(b/a)}$ となることを示せ。
- 3-2.** マックスウェルは、電流が定常的でないときはアンペールの法則は変更を受けることを示した (アンペール・マックスウェルの法則)。この変更の理由を説明せよ。
- 3-3.** ファラデーの電磁誘導の法則とアンペール・マックスウェルの法則とにより、 $a < r < b$ における電磁波の位相速度は光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ となることを示せ。
- 3-4.** この同軸ケーブルの特性インピーダンスを、断面の位置 z で内部導体を流れる電流 $I(z, t)$ と電位 $V(z, t)$ とにより、 $Z(z, t) = \frac{V(z, t)}{I(z, t)}$ と定義する。この特性インピーダンスの値は、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{N} \cdot \text{A}^{-2}]$, $c = 3 \times 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$ を用いると、 $Z(z, t) = 60 \ln(b/a) [\Omega]$ となることを示せ。