

(平成 22 年 8 月 18 日実施)

## 平成 23 年度

### 北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士(博士前期)課程入学試験 専門科目問題(午前)

#### 受験に関する注意

- 試験時間： 9:00～11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも問題 I, II を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	2 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚(各問題 2 枚)
草案紙	問題 I, II	2 枚(各問題 1 枚)

(平成 22 年 8 月 18 日実施)

## 平成 23 年度

### 北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士(博士前期)課程入学試験 専門科目問題(午後)

#### 受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者(宇宙理学専攻を併願する者を含む): 問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者:
  - － 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
  - － 理論惑星科学・惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	2 枚
	問題 VI	3 枚

解答紙 2 問題分 4 枚(各問題 2 枚)

草案紙 2 問題分 2 枚(各問題 1 枚)

## 問題 I

問 1 直線 3 原子分子の 1 次元運動を、図 1 のように、同じ質量  $m$  をもつ 3 つの質点が、質量の無視できるばね (ばね定数  $k$ , 自然長  $l$ ) でつながれている模型で考える。床との摩擦は無視でき、質点の運動は  $x$  軸上に限られているとする。各質点の座標を  $x_1, x_2, x_3$  とし、以下の問に答えよ。

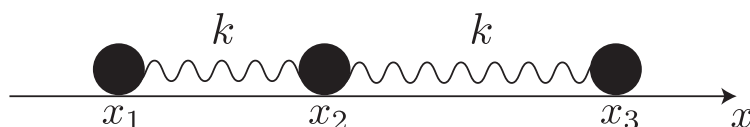


図 1

1-1. 系の全エネルギーを、 $x_1, x_2, x_3$  とそれらの時間微分  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  を用いて表せ。

1-2.  $x_1, x_2, x_3$  に対する運動方程式を求めよ。また  $x_1, x_3$  を  $l$  だけ平行移動した座標

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + l \\ x_2 \\ x_3 - l \end{pmatrix}$$

を導入すると、運動方程式は対称行列  $A$  を用いて次のように書くことができる。

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\omega_0^2 A \mathbf{y}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ここで  $\ddot{\mathbf{y}}$  は  $\mathbf{y}$  の時間による 2 階微分である。行列  $A$  を具体的に求めよ。

1-3. 行列  $A$  の固有値を、値の小さいものから順に  $a_1, a_2, a_3$  とし、対応する固有ベクトルを  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  とする。固有ベクトルを列とする行列  $V = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$  を導入し、その逆行列  $V^{-1}$  を用いて新しい座標

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = V^{-1} \mathbf{y}$$

を定義する。 $q_1, q_2, q_3$  に対する運動方程式を  $a_1, a_2, a_3$  を用いて表せ。また、実際に行列  $A$  の固有値を求め、 $q_2, q_3$  の角振動数を求めよ。

1-4. 行列  $A$  の固有ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  を求め、 $q_1, q_2, q_3$  と  $x_1, x_2, x_3$  の関係式を示せ。また、 $q_1, q_2, q_3$  はそれぞれ、どのような質点の運動に対応するか述べよ (図を使ってもよい)。

問2 太陽系外から飛来する質量  $m$  を持つ質点の運動を、次のような模型で考える。まず、太陽は常に座標原点  $O$  にあり、質量  $M$  を持つとする。従って質点は、太陽による中心力ポテンシャル  $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$  ( $\alpha = GMm$ 、 $G$  は万有引力定数) 中を運動すると見なせる。また、角運動量ベクトルが保存するため、その向きを  $z$  軸とすると、質点は  $x$ - $y$  平面内を運動する。質点は無限遠から  $x$  軸に平行に飛来し、無限遠で座標  $(\infty, b, 0)$ 、速度  $(-v_0, 0, 0)$  であったとする ( $b, v_0$  は正の定数)。このとき、質点は図2の様に近日点  $P$  で太陽に最も接近した後、飛び去る。以下の様にして、太陽から近日点  $P$  までの距離を求めよ。

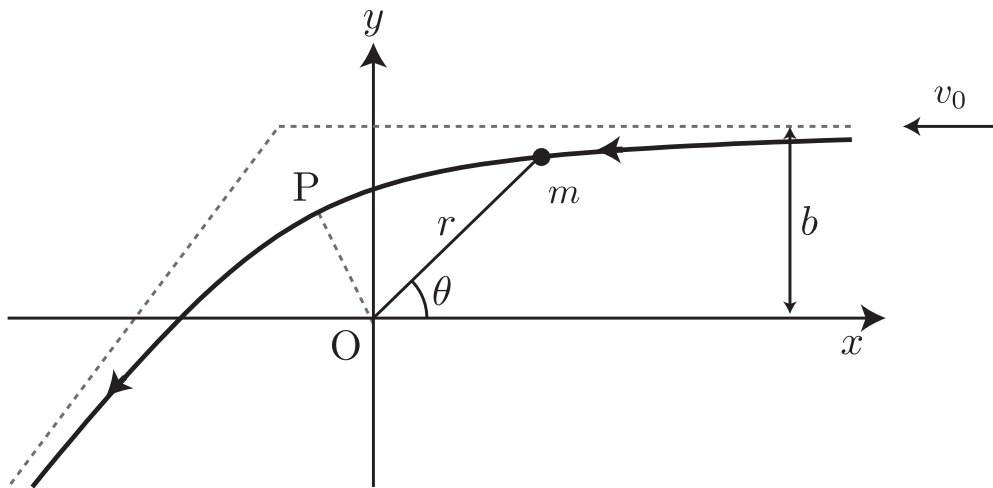


図2

- 2-1. 無限遠での座標と速度を用い、質点のエネルギー  $E$  と角運動量の大きさ  $l$  を  $m, b, v_0$  を用いて表せ。
- 2-2. 質点の角運動量を2次元極座標で表せ。 $r, \theta$  は図2に示したように定義する。また、前問の結果と比較し、角速度  $\dot{\theta}$  を  $r, b, v_0$  を用いて表わせ。
- 2-3. 質点の全エネルギーを2次元極座標で表わすと、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r)$$

の様に動径方向の運動エネルギーと、有効ポテンシャル  $U(r)$  の和として書ける。ここで、 $\dot{r}$  は  $r$  の時間微分を表わす。具体的な  $U(r)$  の表式を  $m, r, l, \alpha$  を用いて示せ。また、その概形を  $r$  の関数として図示せよ。

- 2-4. ここまでの結果を用い、太陽から近日点  $P$  までの距離を  $m, b, v_0, \alpha$  を用いて表わせ。また近日点  $P$  での質点の速度の大きさを求めよ。

## 問題 II

以下の問題では電磁場を SI 単位系で表すことにする。設問はすべて空気中での現象に関するもので、空気の誘電率と透磁率はそれぞれ真空の誘電率  $\epsilon_0$  と透磁率  $\mu_0$  で近似できるものとする。3次元空間の位置ベクトルを  $\vec{r} = (x, y, z)$ 、その大きさを  $r$  で表し、 $a$  を正の定数とする。

問 1 以下の問いに答えよ。

- 1-1. 3次元空間の原点に電荷  $q > 0$  をもつ点電荷が存在する。この点電荷が位置  $\vec{r}$  に作る電場の大きさ  $E(r)$  を求めよ。
- 1-2. 1-1 の電場  $\vec{E}(\vec{r})$  の  $xy$  平面内における概形を電気力線で表せ。
- 1-3. 1-1 の電場の下で、電荷  $q$  を持つもう一つの点電荷を、無限遠方から位置  $\vec{r}$  まで持ってくるのに必要な仕事  $W$  を求めよ。
- 1-4. 点  $\vec{a}/2 \equiv (a/2, 0, 0)$  と  $-\vec{a}/2$  にそれぞれ電荷  $q$  と  $-q$  をもつ点電荷が存在している。この時、点  $\vec{r}$  における電場  $\vec{E}(\vec{r})$  の表式を書き下せ。
- 1-5. 1-4 の電場  $\vec{E}(\vec{r})$  の概形を電気力線を用いて表せ。
- 1-6. 1-4 において、 $r \gg a$  なる点  $\vec{r}$  における電場を、電気双極子モーメント  $\vec{p} \equiv q\vec{a}$  を用いて近似的に表せ。なお、一般に  $x$  の関数  $f(x) \equiv (1+x)^\nu$  は、 $|x| \ll 1$  のとき、 $f(x) \approx 1 + \nu x$  と近似できる。

問 2 以下の問いに答えよ。

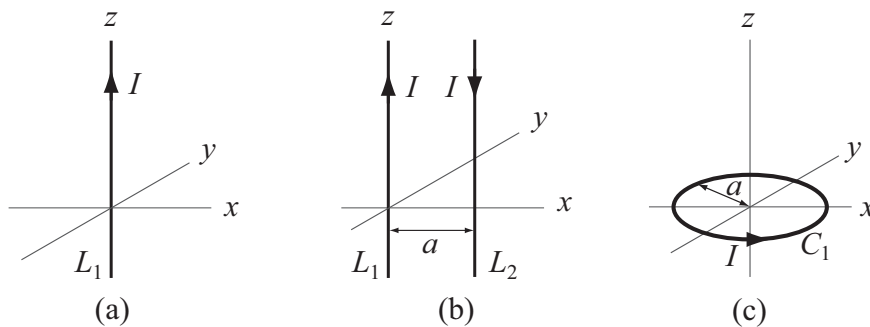


図 1

- 2-1. 図 1(a) のように、 $z$  軸上に伸びた細い導線  $L_1$  内を、 $z = -\infty$  から  $+\infty$  の方向に定常電流  $I > 0$  が流れている。磁束密度  $\vec{B}(\vec{r})$  の  $xy$  平面内における概形 ( $z$  軸の正の方向から見た図) を磁力線で表せ。

- 2-2. 図 1(a) の状況で、 $xy$  平面内の点  $\vec{r}$  における磁束密度の大きさ  $B(r)$  を求めよ。
- 2-3. 図 1(b) のように、 $(a, 0, z)$  ( $-\infty < z < \infty$ ) で表される  $z$  軸に平行な直線上にもう一つの導線  $L_2$  を配置し、 $z = +\infty$  から  $-\infty$  の方向に定常電流  $I$  を流した。導線  $L_2$  が受ける単位長さ当りの力 (アンペールの力) の大きさと方向を求めよ。
- 2-4. 2-3 の状況で生じる磁束密度  $\vec{B}(\vec{r})$  の  $xy$  平面内における概形 ( $z$  軸の正の方向から見た図) を磁力線で表せ。
- 2-5. 図 1(c) のように、 $(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) で表される  $xy$  平面内の円周上に導線  $C_1$  を配置して、定常電流  $I$  を  $\theta$  が増大する方向に流した。このとき、点  $(0, 0, z)$  における磁束密度の大きさを、ビオ・サバルの法則あるいはマクスウェル方程式を用いて求めよ。

問 3 図 2(a) のように、半径  $a$  の断面と中心部からの半径  $b$  を持つドーナツ型の鉄芯がある ( $b \gg a$ )。図 2(b) のように、その周りに絶縁被覆した導線を一様に  $N$  回巻いた ( $N \gg 1$ )。鉄の透磁率を  $\mu$  として以下の問いに答えよ。

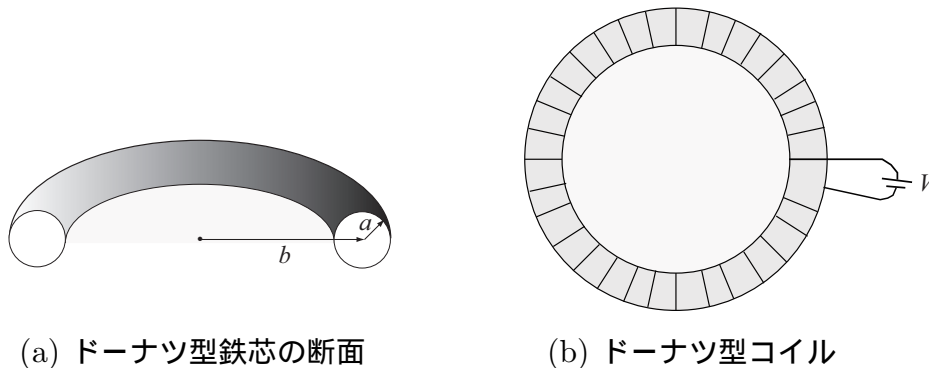
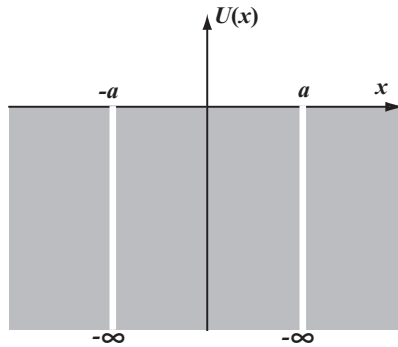


図 2

- 3-1. 導線内に電流  $I$  が流れている場合に、鉄芯内部の中心にできる磁束密度の大きさ  $B$  は電流  $I$  に比例し、 $B = \gamma I$  と書ける。比例定数  $\gamma$  を求めよ。
- 3-2. 電流が  $I = I(t)$  と時間  $t$  に依存する場合に、コイルに生じる全誘導起電力  $\phi$  を求めよ。ただし、 $b \gg a$  の場合、鉄芯内部で  $B$  は一様とみなせる。解答には  $\gamma$  を用いてもよい。
- 3-3. 電流の流れていなかったドーナツ型コイルの両端に、時刻  $t = 0$  において一定電圧  $V$  を加え、それ以降、電圧  $V$  を維持した。コイルではオームの法則が成り立ち、その全抵抗は  $R$  であるとして、 $t \geq 0$  においてコイルに流れる電流  $I(t)$  の表式を求め、その概形をグラフに描け。

## 問題 III

問 1 二重量子井戸の単純なモデルとして、図のような 2 つのデルタ関数型のポテンシャルが距離  $2a$  だけ、離れておかれたモデルを考える。ポテンシャルは、 $U(x) = -\beta[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$  ( $\beta > 0$ ) である。以下の設問に答えなさい。



- 1-1. 1次元ポテンシャル  $U(x)$  が偶関数なので、波動関数は偶関数か奇関数である。これを示せ。但し、固有状態は縮退していない事を使って良い。
- 1-2. 質量  $m$  の粒子が、この 2 つのデルタ関数型のポテンシャルに束縛されているとき、領域 I ( $x < -a$ )、領域 II ( $-a < x < a$ )、領域 III ( $a < x$ ) のそれぞれの領域において、波動関数の一般解を求めよ。但し規格化やポテンシャル境界での接続条件は考慮しなくて良い。
- 1-3. このような無限大のポテンシャルがある場合に、その点で波動関数  $\psi(x)$  の微分が次式を満たす事をシュレーディンガー方程式を微小区間  $[a - \epsilon, a + \epsilon]$  に渡って積分することによって示しなさい。ここで、 $\epsilon$  は正の微小量とする。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{d\psi}{dx} \Big|_{a+\epsilon} - \frac{d\psi}{dx} \Big|_{a-\epsilon} \right) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} \psi(a)$$

- 1-4. 質量  $m$  の粒子が、この 2 つのデルタ関数型のポテンシャルに束縛されているとき、波動関数が奇関数の場合について、1-3 を利用して波動関数と固有エネルギー  $E$  を求めよ。但し、波動関数は規格化しなくて良い。また、固有エネルギー  $E$  は、解析的に得ることは出来ないの、固有値条件が次式になる事を示せ。

$$\tanh \kappa a = \left( \frac{\gamma}{\kappa} - 1 \right)^{-1} \quad \text{但し } \kappa = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}, \quad \gamma = \frac{2m\beta}{\hbar^2} \text{ である。}$$

- 1-5. 1-4 の奇関数解が存在する条件を求めよ。

問2 質量  $m$ 、電荷  $e$  を持ち、固有振動数が  $\omega$  である 1次元調和振動子について考える。

2-1. 1次元調和振動子のハミルトニアン  $\hat{H}$  は位置演算子  $\hat{x}$  とその共役運動量演算子  $\hat{p}$  を使って次のように書ける。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$$

ここで消滅演算子  $\hat{a}$ 、生成演算子  $\hat{a}^\dagger$ 、数演算子  $\hat{N}$  を以下のように定義する。

$$\hat{a} = \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} \hat{p} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} \hat{p} \right), \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

この時、ハミルトニアンが次式のように書ける事を示せ。

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

2-2. 2-1 で定義した数演算子  $\hat{N}$  が、固有値  $n$  の固有状態  $|n\rangle$  を持つ時、これらの固有状態が正規直交完全系を張る事を使って、固有値  $n$  が非負の値である事を示せ。

2-3. 数演算子の固有状態  $|n\rangle$  に演算子  $\hat{a}$  を作用させた  $\hat{a}|n\rangle$  が、数演算子  $\hat{N}$  の固有値  $n-1$  に属する固有状態である事を示し、かつ基底状態が  $|0\rangle$  の状態であることを示せ。

2-4. 基底状態の座標表示  $\langle x|0\rangle (= \psi_0(x))$  を  $\hat{a}\psi_0(x) = 0$  を利用して、具体的に求めよ。

2-5. 次に、今まで考察してきた電荷  $e$  を持つ 1次元調和振動子に、一様な静電場  $E$  を  $x$  軸の正方向にかけた。基底状態を座標表示で、具体的に求めよ。



## 問題 IV

問 1 図 1 のような容器内に気体が閉じ込められている。容器はシリンダー、ピストン、熱浴で構成されており、シリンダーとピストンは断熱材でできている。熱浴部には温度  $T_h$  の高温熱浴または温度  $T_c (< T_h)$  の低温熱浴を取りつけて気体と熱のやり取りができる。ピストンはシリンダー内壁に沿って動かして、気体の体積を変化させることができ、動かす際のピストンとシリンダー内壁の間の摩擦は無視できるものとする。この気体の状態方程式は  $PV = NkT$  ( $P$ : 気体の圧力,  $V$ : 気体の体積,  $N$ : 気体の粒子数,  $k$ : ボルツマン定数,  $T$ : 気体の温度) とし、内部エネルギー  $U$  は  $U = C_V T$  ( $C_V$  は正の定数) であるとする。

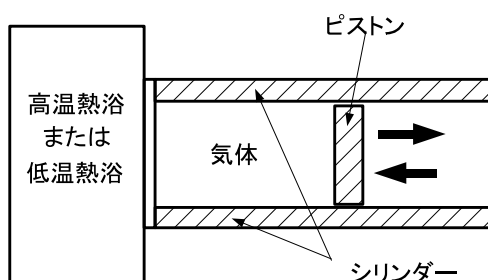


図 1

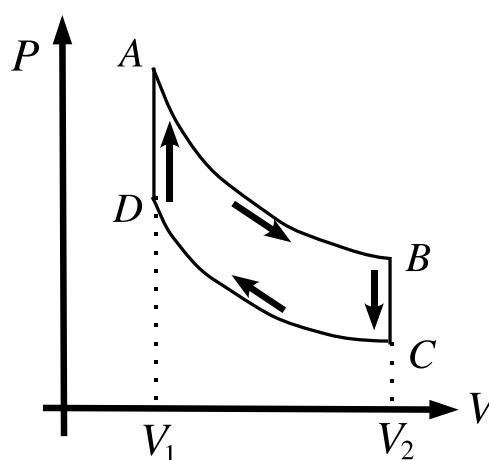


図 2

ピストンを無限にゆっくり動かして、気体の状態が図 2 の  $V - P$  面上を矢印の向きにたどるように変化させて熱機関を構成する。図 2 中、 $A \rightarrow B$  では高温熱浴を接触させて気体を高温熱浴と同じ温度  $T_h$  に保って変化させており、 $B$  の状態になった後すぐに熱浴を低温熱浴に切り替えて、体積を  $V_2$  に保ったままで気体を  $B \rightarrow C$  に変化させる。 $C \rightarrow D$  では低温熱浴を接触させて気体を低温熱浴と同じ温度  $T_c$  に保って変化させており、 $D$  の状態になった後すぐに熱浴を高温熱浴に切り替えて、体積を  $V_1 (< V_2)$  に保ったままで気体を  $D \rightarrow A$  に変化させる。以下の設問には  $N, k, C_V, V_1, V_2, T_h, T_c$  を用いて答えよ。

- 1-1. この熱機関の 1 サイクルで気体が外部にした仕事  $W$  を求めよ。
- 1-2. このサイクル中  $A \rightarrow B$  と  $D \rightarrow A$  で高温熱浴から気体に熱が流れることに注意して、1 サイクルで高温熱浴から気体に流れた熱量  $Q_h$  を求めよ。

1-3.  $\eta = \frac{W}{Q_h}$  で定義される熱機関の効率  $\eta$  を求めよ。また、この  $\eta$  をカルノー効率  $1 - \frac{T_c}{T_h}$  と比べたときの大小について答えよ。

1-4. 全系を気体、高温熱浴、低温熱浴の3つに分けて考えて、この熱機関を1サイクル動かしたとき、3つそれぞれのエントロピー増加量を求めよ。それから全系の1サイクルあたりのエントロピー増加量  $\Delta S$  を求め、 $\Delta S$  の正負について答えよ。

問2 気体粒子1個を吸着し得る吸着点を  $M (\gg 1)$  個もつ吸着板 (図3) がある。粒子が吸着すると、吸着点のエネルギーは  $\epsilon (> 0)$  だけ下がる。吸着点は互いに独立であり、ボルツマン定数を  $k$ 、逆温度を  $\beta = 1/kT$  として、以下の設問に答えよ。

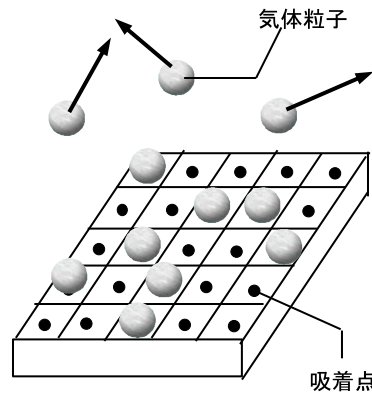


図3

2-1. この吸着板が温度  $T$ 、化学ポテンシャル  $\mu$  の気体 (気体の粒子数  $\gg M$  であるとする) と平衡状態にあるとする。1個の吸着点に吸着している粒子数  $n$  は、 $n = 0$  であるか  $n = 1$  であるかのどちらかである。グランドカノニカル分布を使って、1個の吸着点の大分配関数  $\Xi_1$  を求めよ。

2-2. 2-1 の状況で、吸着板全体に吸着している粒子数  $N$  の平均値  $\bar{N}$  を  $\beta, \epsilon, \mu, M$  で表せ。

2-3. 次に、この吸着板全体に吸着している粒子数を  $N$  に固定し、吸着板を温度  $T$  の平衡状態に保った状況を仮想的に考える。粒子が互いに区別できないとすると  $N$  粒子の吸着板への配置の仕方は何通りあるか求めよ。

2-4. 2-3 の状況で、 $N$  粒子が吸着したときのエネルギーは全ての配置で  $-N\epsilon$  であるので、カノニカル分布を使って、吸着板上の粒子の分配関数  $Z$  を求めよ。

2-5.  $M \gg N \gg 1$  として、2-4 の分配関数  $Z$  より、吸着板上の粒子のヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  を求め、吸着板上の粒子の化学ポテンシャル  $\mu$  を  $\beta, \epsilon, N, M$  で表せ。ここでは、 $x \gg 1$  である量  $x$  に対してスターリングの公式  $\log x! = x \log x - x$  が成立することを用いて解答せよ。