問題 I

問 1 ロケットは搭載した燃料の燃焼ガスを後方に噴射する反作用で推進力を得る。以下では初期質量 M のロケットが重力に抗して直線上を運動する場合を考え、ロケットは燃焼ガスを大きさ u の相対速度で後方に噴射するものとする。また、ロケットの進行方向を座標軸の正の向きに取る。

1-1. 時刻 t におけるロケットの質量と速度を $m(t), v(t)$ とし、微小時間 dt の間に $-dm$ の質量の燃焼ガスを噴射して本体の質量と速度が $m(t)+dm,\ v(t)+dv$ になったとせよ。ロケットが質量に比例する重力 $-m(t)g(t)$ を受けるとして、運動量変化と力積の関係式を求めよ。ただし、２次の微小量については無視せよ。

1-2. 仮に外力がなく（$g(t)=0$）、ロケットの初速度が 0 の場合に、燃料を使い切ったときのロケットの速度を求めよ。ただし、ロケット本体の質量は m_0 とする。

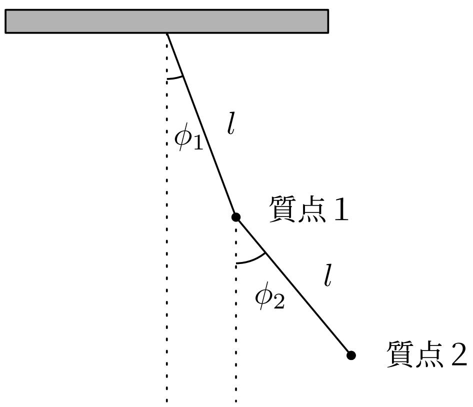
1-3. 重力加速度が一定（$g(t)=g$）とみなせる場合に、ロケットが単位時間に噴射する燃焼ガスの質量 c が一定であるとして、時刻 t におけるロケットの速度を求めよ。ただし、ロケットの初速度は 0 とする。

問 2 同じ質量 m を持つ２つの質点１と２が、下図のように質量が無視できる長さ l の糸に結ばれて天井から吊り下げられている。図のように２本の糸が鉛直方向となす角を ϕ_1, ϕ_2 と表す。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。

2-1. この質点系のラグランジアン L を求めよ。ただし、天井の位置を重力ポテンシャルの基準の位置とする。

2-2. ラグランジュの運動方程式を求めよ。

2-3. 微小振動の場合に、この系の基準振動の角振動数を求めよ。



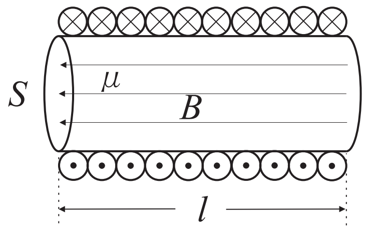
問題 II

問 1 半径 R の球の内部に総電荷 $Q(Q>0)$ が一様な電荷密度で分布している。球の中心 O からの距離を $r(0 \leq r < \infty)$、真空の誘電率を ϵ_0 として次の設問に答えよ。

1-1. ガウスの法則を用いて、電場の大きさ E を r の関数として求め図示しなさい。

1-2. 無限遠点の電位を 0 として、この電場より導かれる電位 V を r の関数として求め図示しなさい。

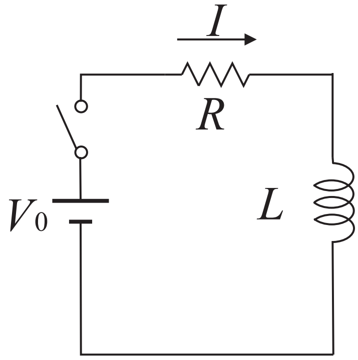
問 2 図のような、透磁率 μ、断面積 S、長さ l の磁性体に導線が一様な密度で N 回巻き付けられたソレノイドを考える。導線に電流 I を流すと磁場が発生する。この磁場の磁束密度 B は、磁性体内部では一様であり、外部では無視できるものと仮定して以下の設問に答えよ。



2-1. アンペールの法則を使って、内部の磁束密度の大きさ B を、I を用いて表しなさい。

2-2. このソレノイドの自己インダクタンス L を求めなさい。

次に、電圧 V_0 の直流電源に、このソレノイドと抵抗 R を直列に接続して電流を流す。



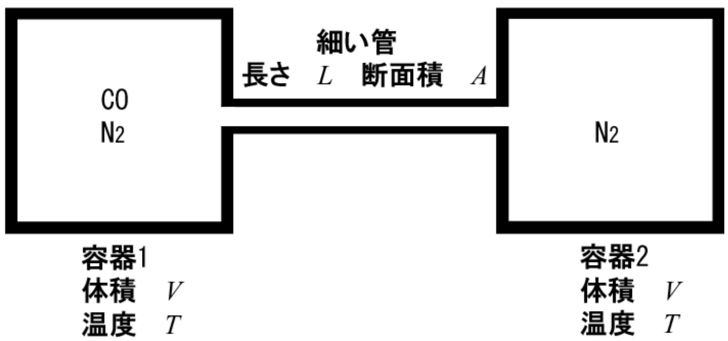
2-3. 時刻 $t=0$ にスイッチを接続した。その後の電流の時間変化を求め図示しなさい。

2-4. この時、定常状態になるまでは、誘導起電力に逆らって電流が流れるため、ソレノイドにエネルギーが蓄積される。定常状態におけるエネルギーの大きさを V_0、L、R を用いて表しなさい。

2-5. 一般に、透磁率 μ の物質中での磁場のエネルギー密度は $B^2/2\mu$ で与えられる。磁性体内部の全磁場エネルギーを求め前問の結果と比較しなさい。

問題 III

問 1 下図のように、体積 V の 2 つの容器があり、十分に細い管（長さ L、断面積 A）で連結されている。時刻 $t=0$ において容器 1 には CO ガスと N_2 ガスの混合気体が、容器 2 には N_2 ガスが入れられていたとする。$t>0$ では、細い管を通って気体の混合が起きる。容器 1 および容器 2 の気体はともに圧力 P、温度 T、数密度 n の理想気体とし、$t=0$ における容器 1 の各成分の数密度は CO ガスが n_0、N_2 ガスが $n-n_0$ とする。管の体積は無視でき、気体の温度は変化しないとして、以下の問に答えよ。



$t=0$ での気体の状態

1-1. 管の中の各気体の流量 F は拡散係数 D と気体の数密度の勾配、管の断面積の積で与えられる。各容器内では混合気体の密度は一様に保たれ、細い管の中では数密度の勾配は場所によらず一定とする。時刻 $t(>0)$ における容器 1 と容器 2 の CO ガスの数密度をそれぞれ、$n_1(t)$、$n_2(t)$ とし、容器 1 から容器 2 へ流入する CO ガスの流量 $F(t)$ を求めよ。

1-2. 各容器内の CO ガスの数密度 $n_1(t)$、$n_2(t)$ が従う微分方程式を記せ。

1-3. 質量保存則を使って、$n_1(t)$ と $n_2(t)$ の時間変化を求めよ。

1-4. 準静的過程では、温度 T、体積 V、数密度 n の理想気体のエントロピー S の変化 dS は、内部エネルギー $U=c_V nVT$ (c_V は 1 分子あたりの定積比熱) として

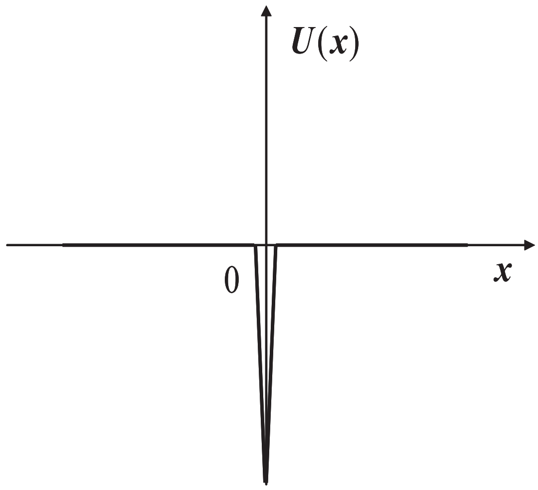
$$TdS = dU + PdV$$

で与えられる。この式を積分して、理想気体のエントロピーを求めよ。ただし、積分定数は、エントロピーが示量変数となるように定めよ。

1-5. 上記の結果を使って、混合前 ($t=0$) と 混合後 ($t=\infty$) での全系のエントロピーの変化を求めよ。

問題 IV

問 1 図のようなデルタ関数型のポテンシャル，$U(x) = -\alpha\delta(x),\ \alpha > 0$ がある場合について, 以下の設問に答えなさい。



1-1. このような無限大のポテンシャルがある場合に，その点で波動関数 $\psi(x)$ の微分が次式を満たす事をシュレーディンガー方程式を微小区間 $[-\epsilon, \epsilon]$ に渡って積分することによって示しなさい。ここで，ϵ は正の微小量とする。

$$\lim_{\to 0}\left(\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{+} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)$$

1-2. 質量 m の粒子が，このデルタ関数型のポテンシャルに束縛されているときの固有関数と固有エネルギーを求めなさい。波動関数は規格化すること。このとき、束縛されている粒子の固有エネルギーは負である。

次に，質量 m の粒子が正のエネルギー E を持って，左側からこのデルタ関数型のポテンシャルに入射してきた。そのときの粒子の散乱について考える。

1-3. この粒子の反射率と透過率を求めなさい。