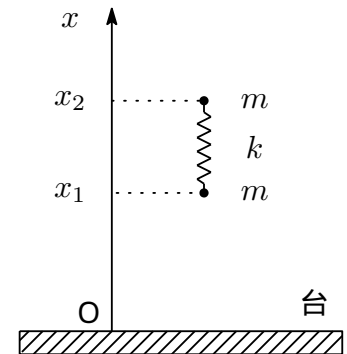


## 問題 I

問 1 右図のように大きさが無視できる質量  $m$  の 2 個の物体が、自然長  $l$ 、ばね定数  $k$  のばねでつながれている。なお、ばねの質量は無視できるものとして扱ってよい。2 個の物体は鉛直線上に並んでおり、以下ではこれらの物体が行う鉛直線上の運動だけを考える。図に示すように台の上面を  $x = 0$  として鉛直上向きに  $x$  軸を取り、下方の物体 1 の座標を  $x_1$ 、上方の物体 2 の座標を  $x_2$  と表す。また、重力加速度の大きさは  $g$  で表す。



- 1-1. この系の運動エネルギーと重力および、ばねのポテンシャルエネルギーを求めよ。また、この結果を用いて、この系のラグランジアン  $L$  を  $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$  を用いて表せ。但し、 $\dot{x}_1$  などのドットは時間微分を表す。また、重力のポテンシャルの基準点は  $x = 0$  に取る。
- 1-2. 2 個の物体の重心座標  $Q = \frac{x_1 + x_2}{2}$  および、相対座標を用いてばねの伸びを表す変数  $q = x_2 - x_1 - l$  を導入する。ラグランジアン  $L$  を  $Q, q, \dot{Q}, \dot{q}$  を用いて表せ。なお、以下の問題を解く上で便利と考えるならば、全質量  $M = 2m$  および換算質量  $\mu = \frac{m}{2}$  の記号を使用しても構わない。
- 1-3.  $Q$  および  $q$  についてのオイラー・ラグランジュの運動方程式を求めよ。
- 1-4. 上方の物体 2 は  $x_2 = h$  の位置に固定され、物体 1 はつりあいの位置に静止している。このときの  $x_1$  の値を求めよ。また、時刻  $t = 0$  に物体 2 を離れた後、物体 1 が台と衝突する前の時刻  $t$  におけるそれぞれの物体の位置  $x_1(t)$  および  $x_2(t)$  を求めよ。
- 1-5.  $x_1, x_2$  に共役な運動量  $p_1, p_2$  と  $Q, q$  に共役な運動量  $P, p$  を求めよ。また、この結果を用いて、 $P, p$  を  $p_1, p_2$  で表せ。
- 1-6. 正準変数として  $Q, q, P, p$  を用いてこの系のハミルトニアン  $H$  を表せ。
- 1-7. ハミルトンの運動方程式を用いると、一般に  $2N$  個の正準変数  $q_i, p_i$  ( $i = 1 \sim N$ ) の関数  $f(q_i, p_i)$  の時間変化は、系のハミルトニアン  $H(q_i, p_i)$  とのポアソンの括弧式により次のように表されることが示される。

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \equiv \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

この関係式と、1-6 のハミルトニアンが  $H(Q, q, P, p) = H_Q(Q, P) + H_q(q, p)$  のように重心運動のハミルトニアン  $H_Q$  と相対運動のハミルトニアン  $H_q$  の和の形に表されることを用いて、 $H_Q$  と  $H_q$  が保存量であることを示せ。

1-8. 1-4 で  $t = 0$  に落下し始めた系について考える。その後、ばねが縮んだ状態から自然長に戻った瞬間に物体 1 は台と弾性的に衝突した。(衝突は瞬間的に完了し、系の力学的エネルギーの損失はない。) 物体 1 との衝突までは台は固定されているが、衝突直後に台を横にずらしたため、物体と台が再び衝突することはないとしてよい。このとき、衝突後の運動における重心座標の最大値を求めよ。

問 2 一定の深さ  $h$  の水の波動現象を考える。簡単のため 1 次元の波 (平面波) を扱うこととし、波が伝わる水平方向に  $x$  軸を取る。また、鉛直上方に  $z$  軸を取り、水底の座標を  $z = -h$  とし、水が静止状態にあるときの水面の座標を  $z = 0$  とする。

2-1. 時刻  $t$ 、位置  $(x, z)$  における水の色度を  $(v_x(x, z, t), v_z(x, z, t))$  と表す。水の色度  $\rho$  は一定とみなし、水中の微小な領域を考えると水の流入流出に関わらず水の量が変化しないことに注目して、次の連続の方程式を導け。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

2-2. 水の色度  $(v_x, v_z)$  が関数  $\phi(x, z, t)$  を用いて  $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  と表されるような流れ (渦なし流) では、(1) 式はラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

で表される。水底における境界条件は

$$v_z(x, z = -h, t) = 0 \quad (3)$$

で与えられ、水面における境界条件は、微小な波動現象の場合には

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z = 0, t) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, z = 0, t) = 0 \quad (4)$$

で近似できる。ここで  $g$  は重力加速色の大きさを表す。 $\phi$  に対して

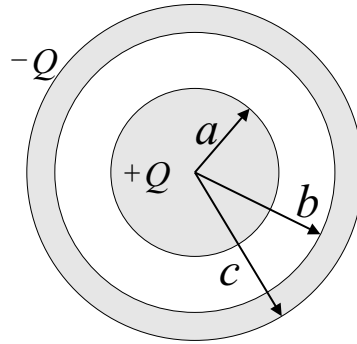
$$\phi(x, z, t) = f(z) \sin(\omega t - kx)$$

の变数分離形の解を仮定し、波数  $k (> 0)$  の波が生じる場合の  $\phi(x, z, t)$  を求めよ。

2-3. 2-2 の特別な場合として深水波 ( $h \rightarrow \infty$ ) および浅水波 ( $kh \ll 1$ ) の位相速度を求めよ。

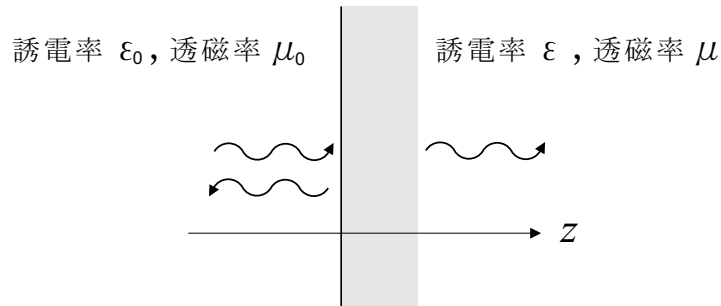
## 問題 II

問 1 図のように、真空中に半径  $a$  の導体球と、内半径  $b$ 、外半径  $c$  の導体球殻が同心状に配置されている。ただし、 $a < b < c$  である。中心からの距離を  $r$ 、真空の誘電率を  $\epsilon_0$  として以下の設問に答えよ。



- 1-1. 一般に、導体表面上で静電場は、その表面に垂直な方向を向いている。この理由を簡単に説明せよ。
- 1-2. 導体球に  $+Q$ 、球殻に  $-Q$  の電荷を与えたとき、 $r$  における電場の大きさ  $E(r)$  を求め、それをグラフに示せ。
- 1-3. この 2 つの導体で作られるコンデンサーの静電容量  $C$  を求めよ。
- 1-4. 静電容量  $C$  のコンデンサーの導体間で、電荷を徐々に移動させ、それぞれの電荷が 0 の状態から、 $+Q$  と  $-Q$  の状態まで変化させた。電場に逆らって電荷を移動させるのに必要な仕事を計算し、それを  $C$  と  $Q$  を用いて表しなさい。
- 1-5. 真空中における静電場のエネルギー密度は  $\epsilon_0 E^2/2$  で与えられる。1-2 で与えられる電場を用いて静電場の全エネルギーを求めよ。また、この静電場のエネルギーが、1-4 で得られる仕事に一致することを 1-3 の結果を用いて示しなさい。

問2 図のように、無限に広い平面  $z = 0$  で真空（誘電率  $\epsilon_0$ 、透磁率  $\mu_0$ ）と境を接する半無限の誘電体（誘電率  $\epsilon$ 、透磁率  $\mu$ ）に垂直に平面電磁波が入射する。この平面電磁波の電場は  $x$  方向を向いているものとする。電荷密度と電流密度が存在しないとき、電場  $E$ 、電束密度  $D$ 、磁場  $H$ 、磁束密度  $B$  の間には、マクスウェル方程式、 $\text{div} D = 0$ 、 $\text{div} B = 0$ 、 $\text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 、 $\text{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t}$  が成り立つ。以下の設問に答えよ。



2-1. 電場  $E$  が  $E(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$  で表されるとき、磁束密度  $B$  は

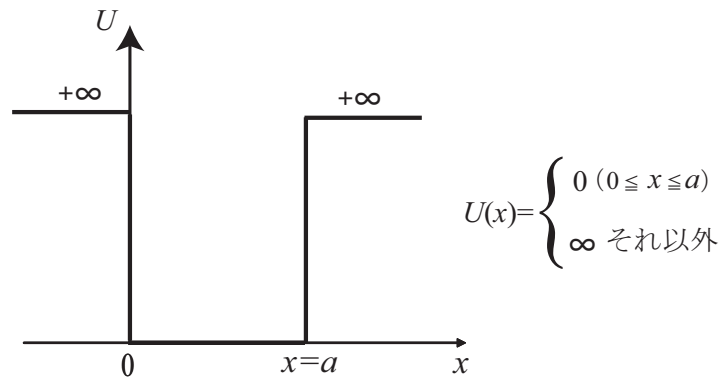
$$B(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k} \times E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}{\omega}$$

と表されることを示しなさい。ここに、 $\mathbf{k}$  と  $\omega$  は、電磁波の波数ベクトルと角振動数である。

- 2-2. 電束密度と磁束密度の時間微分、 $\frac{\partial D}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial B}{\partial t}$  が有限であることを用い、境界面の両側で、電場  $E$  と磁場  $H$  が連続であることを示しなさい。
- 2-3. 物質中で電場の  $x$  成分  $E_x$  に成り立つ波動方程式を  $\epsilon$  と  $\mu$  を用いて表すとともに、そのときの電磁波の速さ  $v$  を求めなさい。
- 2-4. 入射波、透過波、反射波それぞれの電場成分の振幅を  $E_0$ 、 $E_T$ 、 $E_R$  とおいたとき、2-2の結果を用いて、これらの中に成り立つ2つの関係式を求めなさい。
- 2-5. 電磁場の境界面における電場の反射率  $E_R/E_0$  を  $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $\epsilon$ 、 $\mu$  を用いて表しなさい。また、 $\epsilon = 9\epsilon_0$ 、 $\mu = \mu_0$  のときの反射率を求めよ。
- 2-6.  $S = E \times H$  で定義されるポインティングベクトルを考える。境界面における入射波、透過波、反射波それぞれのポインティングベクトル  $S_0$ 、 $S_T$ 、 $S_R$  を  $E_0$  を用いて表し、それらの中に成り立つ関係式を求めなさい。

### 問題 III

問 1 図のような障壁の高さが無限大で、幅が  $a$  であるような 1 次元井戸型ポテンシャル  $U(x)$  に閉じ込められた質量  $m$  の粒子を考える。以下の設問に答えなさい。



1-1. 定常状態の粒子が従うシュレーディンガー方程式を書きなさい。

1-2. この粒子の固有エネルギーと規格化された固有関数を求めなさい。

1-3. 位置の演算子  $\hat{x}$  とそれに共役な運動量演算子  $\hat{p}$  の  $n$  番目の固有状態の期待値  $\langle \hat{x} \rangle$  ,  $\langle \hat{p} \rangle$  を求めなさい。

次に粒子の波動関数が  $\Psi(x) = Ax(a - x)$  である場合を考えよう。

1-4. この波動関数の規格化定数  $A$  を求めなさい。

1-5. この波動関数で記述される粒子が基底状態に見出される確率を求めなさい。

ただし、 $\int_0^\pi t^2 \sin t dt = \pi^2 - 4$  を使って良い。

問2 質量  $m$  で、振動数  $\omega$  の1次元調和振動子のハミルトニアンを考える。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1)$$

式(1)で位置座標  $x$  とそれに対応する微分演算子  $\frac{d}{dx}$  を除いた量  $\hbar, m, \omega$  は、このハミルトニアンのパラメータと見なせる。エネルギー固有値はこれらのパラメータを変えると変化する。ここで一般的な場合として、パラメータ  $\lambda$  に依存するハミルトニアン  $H(x; \lambda)$  と以下のようなシュレーディンガー方程式について考える。

$$H(x; \lambda) \psi_n(x; \lambda) = E_n(\lambda) \psi_n(x; \lambda) \quad (2)$$

波動関数  $\psi_n(x; \lambda)$  は  $n$  番目の固有値  $E_n(\lambda)$  に対応する固有関数で、規格直交化されているものとする。以下の設問に答えなさい。ただし、考察するパラメータが変化する範囲内では縮退は無いものとする。

2-1. 式(2)の波動関数の規格直交関係を内積を使って記せ。また、それをパラメータ  $\lambda$  で微分することによって、

$$\langle \psi_n(x; \lambda) | \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi_n(x; \lambda) \rangle$$

が純虚数であることを示せ。ただし、複素関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の内積  $\langle f(x) | g(x) \rangle$  は  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^* g(x) dx$  で定義される。

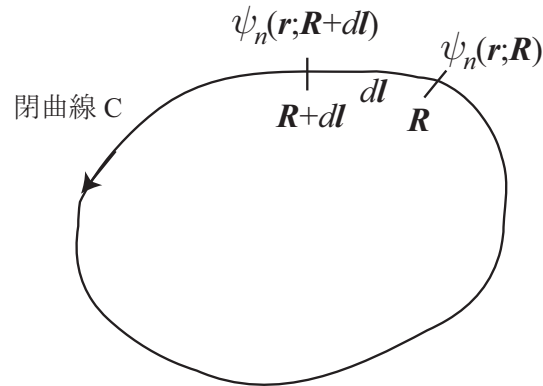
2-2. ハミルトニアンをパラメータ  $\lambda$  で微分した量の期待値が、次式を満たすことを証明せよ。これをヘルマン - ファインマンの定理と呼ぶ。

$$\langle \psi_n(x; \lambda) | \frac{\partial H(x; \lambda)}{\partial \lambda} | \psi_n(x; \lambda) \rangle = \frac{\partial E_n(\lambda)}{\partial \lambda}$$

2-3. ヘルマン - ファインマンの定理を用いると物理量の期待値が簡単に求められる場合がある。2-2のヘルマン - ファインマンの定理のパラメータ  $\lambda$  を  $\omega$  や  $\hbar$  と置いて、式(1)の1次元調和振動子のハミルトニアンに適用することによって、1次元調和振動子の  $n$  番目の励起状態の運動エネルギーの期待値  $\langle T \rangle$  とポテンシャルエネルギーの期待値  $\langle V \rangle$  を求めよ。ただし、固有エネルギーが  $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$  であることを用いて良い。

次に、複数の原子核に束縛された 1 個の電子の状態について考える。この系では、式 (2) における  $x$  が電子座標  $\mathbf{r}$  に対応し、パラメータ  $\lambda$  が原子核の座標の組  $\mathbf{R}$  に対応する。図のようにパラメータ  $\mathbf{R}$  を閉曲線  $C$  にそって変化させた時の固有エネルギー  $E_n(\mathbf{R})$  に対応する波動関数  $\psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R})$  について考える。以下の設問に答えよ。この系のシュレーディンガー方程式は式 (3) である。ここでもパラメータが変化する範囲内では縮退は無いとする。

$$H(\mathbf{r}; \mathbf{R})\psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R}) = E_n(\mathbf{R})\psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R}) \quad (3)$$



2-4. 閉曲線  $C$  に沿った 2 つの極めて近い点  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R} + d\mathbf{l}$  に対応する、それぞれの波動関数を  $\psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R})$ ,  $\psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R} + d\mathbf{l})$  とするとき、この 2 つの波動関数の位相差  $d\phi$  を次式で定義する。

$$d\phi \equiv \text{Arg}\langle \psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R}) | \psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R} + d\mathbf{l}) \rangle$$

ここで、 $\text{Arg}$  は複素数の偏角をとることを意味する。 $d\mathbf{l}$  の 1 次の範囲内で、 $d\phi$  が以下のように書けることを示せ。

$$d\phi = -i\langle \psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R}) | \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{l}$$

2-5. 次式のように、位相差  $d\phi$  を閉曲線  $C$  に沿って積分したものをベリー位相  $\gamma_n(C)$  と呼ぶ。

$$\gamma_n(C) = \oint_C d\phi = \oint_C -i\langle \psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R}) | \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{l}$$

このベリー位相が、波動関数  $\psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R})$  を  $\tilde{\psi}_n(\mathbf{r}; \mathbf{R}) = e^{i\alpha_n(\mathbf{R})}\psi_n(\mathbf{r}; \mathbf{R})$  のようにゲージ変換しても不変なことを示せ。ここで、 $\alpha_n(\mathbf{R})$  は任意の連続な 1 価の実関数である。

## 問題 IV

問 1 図のように断熱壁で囲まれたシリンダーの内部が、気体を通さない質量および厚さの無視できる仕切り板で 2 つの分室に区切られている。左右の分室に単原子分子の理想気体 A と B がそれぞれ 1 モル封入されている。ある時刻  $t_0$  における気体 A と気体 B の絶対温度はそれぞれ  $T_A = 3T_0$ 、 $T_B = T_0$  であった。仕切り板は摩擦なく左右に動くことができるので、系は常に力学的な平衡に保たれるとして、以下の設問に答えよ。ただし、シリンダー内の体積は変わらないとする。



時刻  $t_0$  の気体の状態

- 1-1. 時刻  $t_0$  における気体 A と気体 B の体積比  $V_A/V_B$  を求めよ。
- 1-2. 仕切り板が小さい熱伝導率を持っている場合、やがて 2 つの気体は熱平衡になる。平衡状態に達したときの気体 A と気体 B について、それぞれの温度  $T_A$  と  $T_B$  を求めよ。
- 1-3. 1-2 の場合、時刻  $t_0$  から平衡状態に達する過程で、圧力が変化しないことを示せ。
- 1-4. 絶対温度  $T$ 、体積  $V$  の 1 モルの理想気体のエントロピー  $S$  は次のように表されることを示せ。

$$S = N_A k_B \left( \frac{3}{2} \ln T + \ln V \right) + \text{定数}.$$

ここで、 $N_A$  はアボガドロ数、 $k_B$  はボルツマン定数である。

- 1-5. 1-2 の場合、時刻  $t_0$  の全系のエントロピーと平衡状態に達したあとの全系のエントロピーの差を求めよ。
- 1-6. 仕切り板が熱を通さない場合に、一方の分室から他方の分室への熱の移動が可逆的に実行できたとして、時刻  $t_0$  の状態にあるこの系から引き出すことのできる最大の仕事を求めよ。



問2 絶対温度  $T$  の熱浴に接している体積  $V$  の容器にほとんど独立な区別できない  $N$  個の粒子からなる気体が閉じ込められている。粒子は、質量がゼロで、エネルギー  $\varepsilon$  と運動量の大きさ  $p$  の関係は  $\varepsilon = pc$  ( $c$  は真空中の光速) で与えられる。また、運動量の大きさ  $p$  と  $p + dp$  の間の1粒子のエネルギー状態の数は  $4\pi V p^2 dp / h^3$  ( $h$  はプランク定数) で与えられる。以下の設問に答えよ。ただし、必要があればスターリングの公式  $\ln N! \approx N \ln N$  を用いてよい。

2-1. この系の分配関数  $Z$  が

$$Z = \left[ \left( \frac{k_B T}{c} \right)^3 \frac{8\pi V}{h^3 N} \right]^N$$

となることを示せ。ただし、 $k_B$  はボルツマン定数である。

2-2. この気体の内部エネルギーと状態方程式を求め、単原子分子からなる通常の理想気体と比較せよ。

2-3. この系の定積熱容量  $C_V$  を求めよ。

2-4. この系のエントロピー  $S$  を求めよ。

2-5. この系の全エネルギー  $E$  の分散  $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$  は

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = k_B T^2 C_V$$

で表されることを示せ。ここで、 $\langle \rangle$  は平均を表す。

## 問題 V

問 1 関数  $f(x)$  のフーリエ変換は、角周波数を  $\omega$  として、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

で与えられる。このとき、以下の設問に答えよ。

1-1. 関数  $f(x)$  が

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

で与えられるとき ( $a$  は実定数で  $a > 0$ )、 $F(\omega)$  の 1 階微分方程式を求めよ。

1-2. 関数  $f(x) = e^{-ax^2}$  の定積分が

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

となることを証明せよ。

1-3. 1-1 の微分方程式を解き、関数  $f(x)$  のフーリエ変換  $F(\omega)$  を求めよ。

1-4. 関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{8}x^2}$$

であるとき、フーリエ変換  $F(\omega)$  を求め、そのグラフを図示せよ。ただし、 $1/e$  となる点を図中で示すこと。

問 2  $\phi$  を任意のスカラー場、 $\mathbf{A}$  を定ベクトルとする。このとき、以下の設問に答えよ。

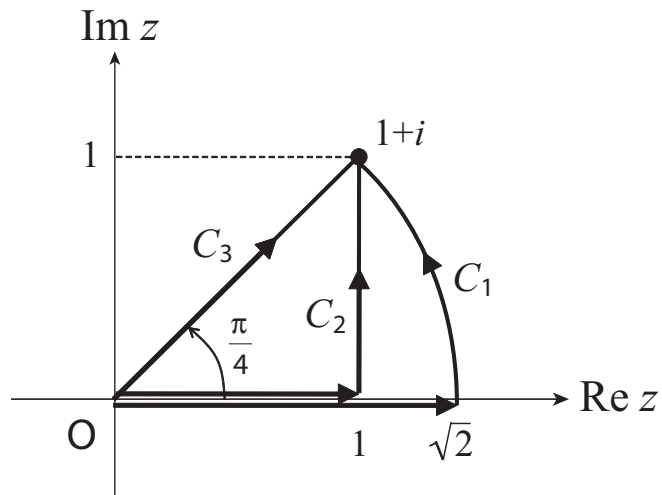
2-1.  $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A}$  を示せ。

2-2. 閉曲線  $C$  を縁とする任意の曲面  $S$  について、

$$\iint_S (\mathbf{n} \times \nabla \phi) dS = \oint_C \phi d\mathbf{r}$$

となることを証明せよ。ただし、 $\mathbf{n}$  は曲面  $S$  の法線ベクトル、 $dS$  は面積要素、 $\mathbf{r}$  は位置ベクトルを表す。必要であれば、任意のベクトル  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  に対して、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  の関係が成り立つことを用いて良い。

問 3 図に示すように、複素平面  $z$  上において原点  $O$  から  $1+i$  に至る積分路を  $C_1, C_2, C_3$  とする。  
 このとき、以下の設問に答えよ。



3-1. それぞれの積分路に沿った複素積分

$$I_k = \int_{C_k} z \, dz \quad (k = 1, 2, 3)$$

を求めよ。ただし、 $I_1, I_2, I_3$  のそれぞれについて、経路に沿った積分を実行し、その計算過程を示すこと。

3-2. 3-1 の複素積分  $I_1, I_2, I_3$  の間に成り立つ関係を示し、その理由を答えよ。

## 問題 VI

問 1 恒星はガス球であり、中心部は高温高密度で完全に電離しており、ガスの密度が大きくなると先ず電子が縮退する。完全に縮退した電子ガスでは、運動量の大きさが  $p$  と  $p + dp$  にある単位体積中の電子数  $n(p)dp$  は、限界運動量を  $p_0$  とすると、

$$n(p)dp = \begin{cases} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp & (p \leq p_0) \\ 0 & (p > p_0) \end{cases}$$

で与えられる。ここで、 $h$  はプランク定数である。また、完全縮退した電子ガスは理想気体とみなすことができ、圧力  $P$  は、電子の速さを  $v$  とすると

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} v p n(p) dp$$

で与えられる。以下の設問に答えよ。

- 1-1. 電子の数密度を  $n_e$  とするとき、限界運動量  $p_0$  はいくらか。
- 1-2. 電子とイオンからなるガスの密度を  $\rho$ 、電子一個あたりのガスの平均分子量が  $\mu_e$  であるとき、電子数密度  $n_e$  を  $\rho$  を用いて表せ。ここで 原子質量単位を  $m_u$  とせよ。
- 1-3. 電子の運動が非相対論的、すなわち、 $p = m_e v$  ( $m_e$  は電子の質量) の場合と、超相対論的、すなわち  $v = c$  ( $c$  は光速) と近似できる場合のそれぞれ対して、完全縮退電子気体の圧力 (縮退圧) を  $\rho$  を用いて表せ。
- 1-4. 状態方程式が ポリトロピックな関係式  $P = K\rho^{1+1/n}$  ( $K$  は比例定数、 $n$  はポリトロピック指数) で与えられる重力平衡にあるガス球に対して、 $1 < n < 3$  の時には、ガス球の質量  $M$  と半径  $R$  の間には、 $R^{3-n} \propto 1/M^{n-1}$  の関係が成り立つ。一方、 $n = 3$  の場合には、質量は半径によらない。このことから、電子の縮退圧で重力平衡にあるガス球 (白色矮星) に対してどのようなことが言えるかを簡潔に述べよ。

**問 2** ある位置  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  で  $(\theta, \phi)$  方向に伝播する光の強度  $I_\nu(\mathbf{r}; \theta, \phi)$  は、位置  $\mathbf{r}$  にある微小面積要素  $d\sigma$  を通って  $(\theta, \phi)$  方向の微小立体角  $d\Omega$  内に単位時間に流出する振動数が  $\nu$  と  $\nu + d\nu$  の間にある光のエネルギーは  $I_\nu d\nu \cos \theta d\sigma d\Omega$  で与えられると定義されている。ここで、 $\theta$  は光の進行方向と  $d\sigma$  の法線がなす角であり、 $\phi$  は方位角である。単位時間に単位面積を通過する光のエネルギー量 (フラックス)  $F_\nu$  は、 $I_\nu$  を用いて、 $F_\nu(\mathbf{r}) = \int I_\nu(\mathbf{r}; \theta, \phi) \cos \theta d\Omega$  で与えられる。吸収係数  $\kappa_\nu$ , 放射係数  $\epsilon_\nu$  の媒質中 (散乱がない場合) を光が伝播するとき、伝播経路  $s$  に沿っての  $I_\nu$  の変化は、輻射輸送方程式

$$\frac{dI_\nu(s)}{ds} = -\kappa_\nu(s)I_\nu(s) + \epsilon_\nu(s)$$

で与えられる。以下の設問に答えよ。

**2-1.** 光の伝播経路にそっての光学的厚さ  $\tau_\nu(s) = \int_0^s \kappa_\nu(s') ds'$  を変数としたとき、輻射輸送方程式は、

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

となることを示せ。ここで  $S_\nu$  は  $S_\nu = \epsilon_\nu / \kappa_\nu$  で定義される源泉関数である。

**2-2.** 前問で与えられた輻射輸送方程式の形式解 (光学的厚さ  $\tau_\nu$  での強度  $I_\nu$ ) を求めよ。この時、 $\tau_\nu = 0$  での光の強度を  $I(0)$  とせよ。

**2-3.** 光が伝播する媒質が温度  $T$  の熱平衡状態にあるとき、 $S_\nu$  はプランク関数  $B_\nu(T)$  となる。この根拠を簡潔に述べよ。

次に温度  $T$  で熱平衡状態にある半径  $R$  の一様なガス球を考える。ガス球の中心を通る経路に沿っての光学的厚さを  $\tau_\nu$  とする。外部からガス球に入射する光はないとして以下の設問に答えよ。

**2-4.** ガス球の中心  $O$  から距離  $b (< R)$  の点を  $P$ 、 $P$  を通って  $OP$  に垂直な直線が球の表面と交わる点をそれぞれ  $A$ 、 $B$  とし、 $OA$  と  $PA$  のなす角を  $\theta$  とする。経路  $AB$  の光学的厚さを  $\tau_\nu$  と  $\theta$  を用いて表わし、 $A$  点での光の強度  $I_\nu(\theta)$  をもとめよ。

**2-5.**  $A$  点を通して外側に放出されるフラックス  $F_\nu$  を求めよ。