（平成 19 年 8 月 22 日実施）

平成 20 年度

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	3 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 質量 m の小球が、重力と速度 v に比例する空気抵抗 $F_v = -bv$ (b は正定数) を受けて垂直落下している。重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。

1-1. 小球の位置を z, 重力の働く向きを $+z$ 方向として、小球に対するニュートンの運動方程式を立てよ。

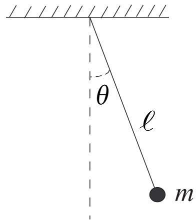
1-2. この小球が落下の際に得る速さには上限値 v_{f} が存在する。v_{f} の表式を求めよ。

1-3. 初期時刻 $t = 0$ に小球を静かに放し落下させた。運動方程式を解き、$t\ (> 0)$ における速度 $v(t)$ を求めよ。

1-4. t の関数としての $v(t)$ の概形をグラフに表せ。

問 2 長さ ℓ の糸の一端を固定し、他端に質量 m の小球をつけて、鉛直面内で振動させる。重力加速度を g、また鉛直方向と糸のなす角を θ として、以下の問いに答えよ。

2-1. 小球の運動方程式を求めよ。



2-2. 時刻 $t = 0$ において $\theta(t = 0) = \theta_0$ の位置から小球を静かに放した。ここで定数 θ_0 は条件 $0 < \theta_0 \ll 1$ を満たすものとする。運動方程式を解き、$t > 0$ における $\theta(t)$ を求めよ。

2-3. 振動の周期 T を求めよ。

次に、小球には速度 v に比例する摩擦力 $F = -2m\gamma v$ (γ は正定数) が働くものとして、この微小振動に対する摩擦の影響を考察する。小球は、**2-2** の場合と同様に、$\theta(t = 0) = \theta_0 \ll 1$ の位置から静かに放す。

2-4. この場合の運動方程式を書き下せ。

2-5. 小球の振動が可能であるための γ に対する条件、すなわち、小球が $\theta = 0$ を通過するための γ の条件を求めよ。

2-6. 前問の条件が満足される場合について運動方程式を解き、$\theta(t)$ を求めよ。

2-7. 振動の周期 T および振幅が e^{-1} 倍になるまでの時間 τ を書き下せ。また、$\theta(t)$ の概形を t の関数として描け。

問 3 質量 m と電荷 $e>0$ を持つ古典粒子が電磁場中を運動している。この粒子に対するラグランジアン L は次式で与えられる。

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2+e\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}-\mathrm{e}\phi.$$

ここで $\dot{\boldsymbol{r}}\equiv d\boldsymbol{r}/dt$ は速度、また $\phi=\phi(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ はそれぞれ電磁場のスカラー・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルである。

3-1. 運動方程式が次式で与えられることを示せ。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=e\boldsymbol{E}+e\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}. \tag{1}$$

ただし、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は次式で与えられる電磁場である。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}.$$

以下、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が一定の場合を考える。デカルト座標系を採用し、$\boldsymbol{B}$ の向きを z 方向に選ぶ。すると、成分表示で $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ と表せる。

3-2. 運動の際に $\mathcal{E}=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2-e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}$ で定義されるエネルギー $\mathcal{E}$ が保存される (時間変化しない) ことを (1) 式より示せ。

3-3. $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ の場合について、時刻 $t=0$ に $\dot{\boldsymbol{r}}(0)=(v_0,0,0)$ の状態にあった粒子の $t>0$ における速度 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ を求めよ。これはどのような運動か？

3-4. y 方向の静電場 $\boldsymbol{E}=(0,E,0)$ がある場合について、$t=0$ において原点に静止していた粒子の $t>0$ における速度 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ と位置 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ。また、xy 面内における軌跡 $\boldsymbol{r}(t)$ の概形を描け。

問題 II

問 1 図 1 のように、半径が a である 2 枚の薄い円盤状電極を、真空中で間隔 d $(\ll a)$ を開けて平行に対置したコンデンサーについて考える。以下、コンデンサーに電荷が蓄えられている場合、電場は両電極間（コンデンサー内部）にしか無く一様で、その方向は電極に垂直であるとする。また、真空の誘電率と透磁率を、それぞれ ε_0、μ_0 とする。

まず、コンデンサーの上部電極と下部電極に、それぞれ一定電荷 $+Q_0$（$Q_0 > 0$）と $-Q_0$ が蓄えられている状態（状態 A）を考える。このときのコンデンサー内部の電場の大きさを E とする。

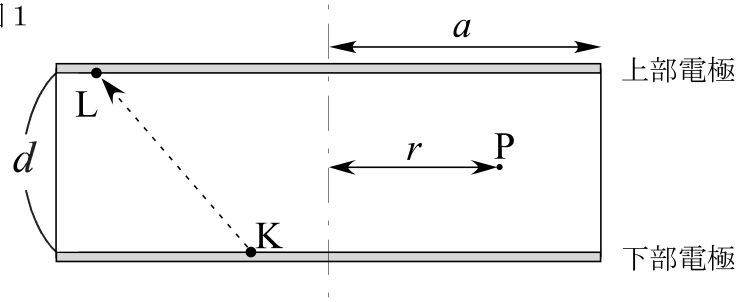
1-1. ガウスの法則を用いて E と Q_0 の関係を導け。ただし、積分する面を図示し、その図に基づいて導出過程を記せ。

1-2. 図 1 のように、矢印付きの破線で示したコンデンサー内部の経路（本紙面上で左上がりの直線経路）に沿って、微小電荷 Δq を下部電極の K 点から上部電極の L 点まで、ゆっくりと運んだとする。このとき必要な仕事 X を、仕事の定義にしたがって線積分により求め、その結果を E の関数として書け。

1-3. **1-1**、**1-2** の結果を踏まえて、両電極に電荷が全く無い状態から、状態 A を実現するために必要な仕事 W を Q_0、a、d、ε_0 だけの関数として求めよ。さらに、この仕事 W が電場のエネルギーとしてコンデンサー内部の空間に蓄えられるとしたとき、単位体積あたりの電場のエネルギー w を E の関数として書け。

1-4. 状態 A において、上部電極の単位面積あたりに働いている力の大きさ F を E の関数として導け。なお、導出の際、上部電極を上方に微小距離 Δd だけ仮想変位するときに必要な仕事を考慮せよ。

図 1



次に、状態 A にあるコンデンサーの両電極間を、時刻 $t = 0$ で抵抗 R（コンデンサーの外部にある）を介して繋いだ場合を考える。なお、任意の時刻 t (≥ 0) におけるコンデンサー内部の電場は、その時に電極にある電荷 $\pm Q(t)$ だけで決まるとする。

1-5. 上部電極の電荷の時間変化 $Q(t)$ $(t \geqq 0)$ を決める微分方程式をたて、その解を求めよ。なお、コンデンサーの静電容量は C とすること。

1-6. コンデンサー内部の電場が時間変化するために生ずる磁束密度について考える。図 1 に示すように、コンデンサーの中心軸から距離 r $(\leqq a)$ の点 P における磁束密度の大きさ $B(r,t)$ を $Q(t)$ の関数として求めよ。

問 2 真空中の電磁波を記述するマクスウェルの方程式は、あるゲージを用いれば

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0 \tag{4}$$

と書かれる。ここで、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}$、c、t は、それぞれ電場、磁束密度、ベクトル・ポテンシャル、真空中での光速、時間である。また x、y、z は空間座標である。以下、(3) 式と (4) 式の特解として減衰のない直線偏光した電磁波

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e} a e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{5}$$

を考える。ここで、$\boldsymbol{e}$、a、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{r}$、ω は、それぞれ電磁波の偏光方向を表す単位ベクトル、振幅（正定数）、波数ベクトル、位置ベクトル（座標成分は x、y、z)、角振動数（正定数）である。なお、本問では $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ を複素数として扱う。もし実際の物理量が必要ならば、それらの実数部分を考えれば良い。

2-1. (5) 式で記述される電磁波 $\boldsymbol{A}$ において、ある時刻 t_0 での波面（等位相面）を表す式を求めよ。また、この波面の幾何学的形状がどのようなものであるのか、そして波面の進む方向はどの方向なのか、両者とも理由を明らかにして答えよ。

2-2. $\boldsymbol{A}$ が波動方程式 (3) を満たすための条件を求めよ。ただし、$\boldsymbol{k}$ の大きさを k とし、これを用いること。

2-3. $\boldsymbol{A}$ が (4) 式を満たすために $\boldsymbol{e}$ の方向に課せられる条件を求めよ。また電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の方向を (1) 式と (2) 式から求めよ。これら 3 つの方向の相互関係が分かるよう図を描け。

ポインティング・ベクトルの時間平均 $\bar{\boldsymbol{P}}$ と電磁波のエネルギー密度の平均 $\bar{w}$ は

$$\bar{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^* \tag{6}$$

$$\bar{w} = \frac{1}{4}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^*) \tag{7}$$

と書ける。ただし、ここで ε_0 と μ_0 は、それぞれ真空の誘電率と透磁率であり、真空中での光速と $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ の関係がある。また、*は複素共役をとることを意味している。

2-4. ポインティング・ベクトルの方向と大きさは、それぞれ、どの様な物理的意味を持つのか答えよ。

2-5. (6) 式と (7) 式を必ず使用して、$\bar{\boldsymbol{P}} = \boxed{}\ \bar{w}$ と書いたときの $\boxed{}$ 内を c、$\boldsymbol{k}$、k（$\boldsymbol{k}$ の大きさ）だけで表せ。さらに、この $\bar{\boldsymbol{P}}$ と $\bar{w}$ の関係が物理的に妥当であることを文章にて記述せよ。 なお、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ を任意のベクトルとしたときに、$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ が成り立つ。

（平成 19 年 8 月 22 日実施）

平成 20 年度

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者：**問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。
  - 宇宙物質進化論・宇宙物理化学・惑星物理学 (現象と構造、起源と進化、地球流体力学）を志望するものは**問題 III, IV, V, VI** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	1 枚
	問題 VI	1 枚
解答紙	2 問題分	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 図 1 の pV 図 (圧力と体積の関係) で示される熱機関 (オットー・サイクル) の熱効率を考えよう。ここで 状態 $1 \to 2$、$3 \to 4$ の変化は準静的定積過程、状態 $2 \to 3$、$4 \to 1$ の変化は準静的断熱過程である。作業物質は n モルの理想気体とし、また系の定積モル比熱 C_v、および γ(=定圧モル比熱 / 定積モル比熱) はそれぞれ一定とする。状態 1、2、3、4 の温度をそれぞれ T_1、T_2、T_3、T_4 として以下の問いに答えよ。

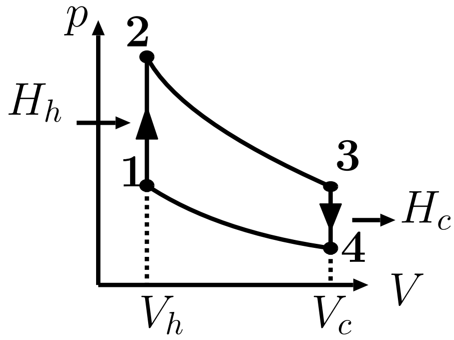


図 1

1-1. 過程 $1 \to 2$ において系が外部から得る熱 H_h を T_1、T_2 を用いて表せ。
また、過程 $3 \to 4$ において系が外部に放出する熱 H_c を T_3、T_4 を用いて表せ。

1-2. 温度の比 T_3/T_2、T_4/T_1 を V_h、V_c、γ のみを用いて表せ。
準静的断熱過程におけるポアソンの関係式 ($pV^\gamma =$ 一定) を利用してよい。

1-3. オットー・サイクルの熱効率 η を V_h、V_c、γ のみであらわせ。

問 2 ギブスの自由エネルギーを用いて水と水蒸気の相平衡の問題を考えよう。ギブスの自由エネルギー G の全微分は

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$

と与えられる。ここで、S、T、V、p、μ、N はそれぞれエントロピー、温度、体積、圧力、化学ポテンシャル、分子数である。

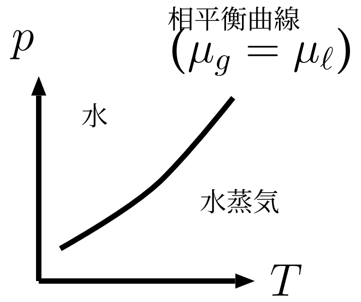


図 2

2-1. ここで独立な示量変数は N のみである。このことからギブスの自由エネルギーが $G = \mu N$ とも表せることを示せ。

2-2. 化学ポテンシャルは示強変数であり、T、p の関数である。化学ポテンシャルの全微分 $d\mu$ が次のように与えられることを示せ。

$$d\mu = -\frac{S}{N}dT + \frac{V}{N}dp$$

2-3. 水と水蒸気が相平衡にあるとき、両相における T、p、μ は互いに等しい。このことを利用して、図 2 に示す相平衡曲線上でクラウジウス・クラペイロンの関係式、

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_g - V_\ell)}$$

が成り立つことを示せ。ただし L、V_g、V_ℓ は、全て 1 モルあたりの量であり、それぞれ水の気化熱、水蒸気の体積、水の体積である。

2-4. クラウジウス・クラペイロンの関係式を解いて、水と水蒸気が相平衡にあるときの圧力 (飽和蒸気圧) を温度 T の関数として求めよ。ここで、水蒸気は理想気体とし、L を一定とする。また、$V_g \gg V_\ell$ として水の体積を無視してよい。気体定数は R とする。

問 3 交換相互作用が働くスピンの問題を平均場近似で考えよう。一様な外部磁場 (H) 中にある N 個の格子点上のスピンがそれぞれ z 個の最近接のスピンと強さ J ($J \geq 0$) で相互作用している場合、系のエネルギーが

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i \simeq -(\mu H + zJx) \sum_i \sigma_i + \frac{1}{2} zNJx^2$$

と近似的に表せるものとする。ここで$\displaystyle\sum_{\langle i,j \rangle}$ は最近接のスピン対についての和を示し、μ はスピン磁気モーメントである。また、σ_i は ± 1 の値のみをとるものとし、σ_i の平均値を x とおいている。系には周期境界条件を課すものとし、ボルツマン定数を k_B として、以下の問に答えよ。

3-1. x が与えられている場合に、ヘルムホルツの自由エネルギーが次のように求められることを示せ。

$$F = \frac{1}{2} zNJx^2 - Nk_B T \log \left[2 \cosh \left(\frac{\mu H + zJx}{k_B T} \right) \right]$$

3-2. 相互作用がなく温度が十分に高い ($J = 0$、$k_B T \gg \mu |H|$) 場合を考える。
磁化の強さ $M = -\partial F / \partial H$、および磁化率 $\chi = \partial M / \partial H$ を求めよ。

3-3. 磁場がなく温度が十分に低い ($H = 0$、$k_B T \ll zJ$) 場合を考える。
F を x の関数としてグラフの概形を示せ。

3-4. σ_i の平均値が x と等しくなる条件 (つじつまのあう条件) を求めよ。

3-5. 相互作用が有限である ($J > 0$) 場合、ゼロ温度では $H = 0$ でも自発磁化が生じる。ゼロ温度から温度を上げていくとき、自発磁化が消失する温度 (キュリー温度、T_c) を求めよ。

問題 IV

問 1　次の問いに答えなさい。

1-1. ある金属に光を照射したところ、光の波長が 310nm 以下のとき光電効果が観測された。そして光の波長が 155nm では、4eV までの電子が観測された。このことからプランク定数と光速の積の値を (eV・nm) の単位で求めなさい。

1-2. $0 \leq x \leq L$ の間に拘束された電子の波動関数が、N を規格化因子として $\psi(x) = N\sin\frac{\pi x}{L}$ であった。N を求めた後、この電子が 0 から $L/3$ の範囲で見いだされる確率を求めなさい。

1-3. 図 1 のような階段型ポテンシャルに左側から波数 k で入射する粒子がある。透過する粒子の波数は k' である。このとき、粒子の反射率を求めなさい。

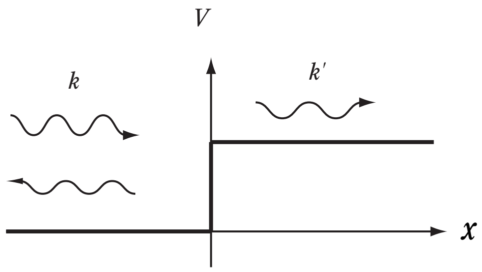


図 1

1-4. 角運動量演算子 $\hat{J}_i (i = 1, 2, 3)$ の満たす交換関係は ε_{ijk} を 3 階の完全反対称テンソルとして

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

で与えられる。このとき、演算子 $\hat{\boldsymbol{J}}^2 = \sum_{j=1}^{3} \hat{J}_j \hat{J}_j$ が $\hat{J}_i$ と可換であることを示しなさい。

1-5. HCl などの 2 原子分子では、2 原子間の振動を無視すると、回転のハミルトニアンは換算質量 μ、原子間の距離 R_0、軌道角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}$ により

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2\mu R_0^2}$$

と表される。第一励起状態から基底状態へ移るときに放出される光の波長を求めなさい。

問 2　重心が静止している水素原子の状態について考えよう。電子の電荷を $-e$、原子核の中心からの変位を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ として、ポテンシャルエネルギーは $V(r) = -e^2/r \quad (r = |\mathbf{r}|)$ で与えられる。ここで μ を換算質量、$a_0 = \hbar^2/\mu e^2$ をボーア半径とすると、基底状態の波動関数は、N を規格化因子として Ne^{-r/a_0} で表される。これについて以下の問いに答えなさい。なお、それぞれの問題はほぼ独立に解くことができる。

2-1. 規格化因子や期待値が３次元的な積分によって表されることに注意して、基底状態に対する、N と期待値 $< r^n >$（n : 正整数）を求めなさい。（積分公式 $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$ を利用するとよい。）

2-2. ラプラス演算子 ∇^2 は、極座標において、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

と表される。相対座標 $\mathbf{r}$ に関するシュレーディンガー方程式を用いて、水素原子の基底状態のエネルギーを求めなさい。

2-3. 水素原子のハミルトニアンに A を定数として $A\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ の摂動が加わったとき、1s と 2p 状態のエネルギーに対する１次の補正の値を求めなさい。

2-4. 通常の水素の同位体である重水素では、吸収される光のスペクトルは通常の水素からわずかにずれる。この主な理由を３０字以内で答えなさい。

ハミルトニアンが $\hat{H}_0$ である水素原子に z 軸方向の電場 E をかけると、摂動ポテンシャル $\hat{H}' = eEz$ が発生する。
$\hat{F}_0$ を

$$\hat{F}_0 = \frac{E}{e}\left(\frac{r}{2} + a_0\right) z$$

と定義すると、水素原子の基底状態 $|0>$ に対して関係式

$$[\hat{H}_0, \hat{F}_0]|0>= \hat{H}'|0>$$

が成り立つことが示される。

2-5. 関係式 $[\hat{H}_0, \hat{F}_0]|0>= \hat{H}'|0>$ により、基底状態に対して、分極 $p = -ez$ の期待値は、１次までの摂動において $<p>= 2 < 0|ez\hat{F}_0|0>$ と書けることを示しなさい。

2-6. 分極と電場の比例係数である分極率 $\alpha =<p> /E$ は a_0^3 に比例する。
$<p>= 2 < 0|ez\hat{F}_0|0>$ を計算して、水素原子の基底状態に対して α を求めなさい。
また、水素原子の基底状態とヘリウム原子の基底状態では、どちらの分極率が大きいと推測されるか、理由とともに答えなさい。

問題 V

以下の３問 (問１～３) の全てに解答すること。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に対し $r = |\boldsymbol{r}|$ であり、$\phi(r)$ を実関数とする。以下の問に答えよ。

1-1. $\nabla \times (\phi(r)\boldsymbol{r})$ を計算せよ。

1-2. 原点 $\boldsymbol{r} = 0$ 以外で $\nabla \cdot (\phi(r)\boldsymbol{r}) = 0$ を満たす $\phi(r)$ を求めよ。

問 2 複素数において対数関数 $w = \log z$ は指数関数の逆関数として定義される。すなわち、$z = e^w$ が成り立つ。以下の問に答えよ。

2-1. z が極形式で $z = re^{i\theta}$ (r, θ は実数で $r \geq 0$) と表されるとき

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2\pi n) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

であることを示せ。ただし、上式で $\ln r$ は実関数の対数関数である。

2-2. べき関数 $w = z^a$ (a: 複素数）は、$z^a = e^{a \log z}$ と定義される。これより、次の２つの複素数をそれぞれ極形式にて表せ。

$$i^i, \qquad 1^{\sqrt{2}}$$

問 3 偏微分方程式

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \qquad (0 \leq x \leq 1, t \geq 0) \tag{1}$$

の解 $f(x,t)$ が次の初期条件と境界条件を満たすものとする。

$$f(x,0) = g(x) \tag{2}$$

$$f(0,t) = f(1,t) = 0 \tag{3}$$

このとき以下の問に答えよ。

3-1. 変数分離の形（$f(x,t) = u(x)v(t)$）で、(3) 式を満たす微分方程式 (1) の解をすべて求めよ。（ここでは、(2) 式の条件は考慮しなくてよい。）

3-2. 前問 3-1 で得られた $u(x)$ のうち，任意の２つの解が満たす直交関係を書き下し，実際にそれが満たされていることを示せ。

3-3. さらに (2) 式も満たす解は、3-1 で求めた解の重ね合わせで表される。3-2 で示した直交関係を用いて、

$$g(x) = |\sin(2\pi x)|$$

の場合に対し、解 $f(x,t)$ を求めよ。

問題 VI

次の５つの小問から２つ選択し、それぞれ 600 字以内で答えよ。図も描いてよい。（但し図のみは不可。）

(1) 炭素質コンドライトは太陽系で最も始原的な固体物質であると言われる。その理由を複数挙げ、始原的の意味を論述せよ。

(2) 太陽系の短寿命放射性核種の例を挙げ、それらの起源について述べよ。またそれらを年代測定に使う場合の仮定と原理について述べよ。

(3) 太陽系の惑星および諸天体形成に果たした衝突の効果について、微粒子から微惑星への形成過程・微惑星から惑星への形成過程・巨大天体同士の衝突を区別して論述せよ。

(4) ダイナモ作用と惑星磁場の関係について、その考えうる原因とメカニズムを論述せよ。また、個々の惑星について、磁場の強さと方位の異なる理由を論述せよ。

(5) 惑星内部の物質と状態について調べる方法を複数挙げ、それらによって何が解ったか（解るか）を論述せよ。