

(平成 19 年 2 月 6 日実施)

## 平成 19 年度

### 北海道大学大学院理学院 量子理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験（第二次募集） 専門科目問題

#### 受験に関する注意

- 試験時間： 9:00～12:00 の 3 時間
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の間が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の間を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者：問題 I～IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - － 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学を志望するものは問題 I～IV を解答すること。
  - － 宇宙物質進化論・宇宙物理化学・惑星物理学・地球流体力学・気象学を志望するものは問題 I, II を解答し、さらに問題 III, IV, V, VI の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	1 枚
	問題 II	2 枚
	問題 III	2 枚
	問題 IV	1 枚
	問題 V	1 枚
	問題 VI	1 枚
解答紙	4 問題分	8 枚 (各問題 2 枚)
草案紙	4 問題分	4 枚 (各問題 1 枚)

# 問題 I

**問 1** 図 1 のように、半径  $a$  質量  $M$  の一様な円板のまわりに糸を巻きつける。糸の一端を固定し、糸が鉛直になるような位置において円板を静止状態から放す。鉛直下方に  $x$  軸をとり円板の重心の座標を  $x(t=0$  で  $x=0$ )、円板の中心軸まわりの回転角を  $\theta$  (反時計回りを正とし、 $t=0$  で  $\theta=0$ ) とする。重力加速度を  $g$  とするとき次の問いに答えよ。ただし、空気抵抗は無視できるものとする。

**1-1.** 円板の中心軸のまわりの慣性モーメントは  $I = \frac{1}{2}Ma^2$  であることを示せ。

**1-2.** 円板の並進運動の運動エネルギー  $T_G$ 、円板の軸回りの回転運動の運動エネルギー  $T_R$ 、円板のポテンシャル・エネルギー  $U_G$  ( $x=0$  で  $U_G=0$  とする) を位置変数  $x$  とその時間微分  $\dot{x}$  を用いて表せ。

**1-3.** 位置変数  $x$  に関する運動方程式を求めよ。また、糸が長さ  $l$  ほどけたときの重心の速さを求めよ。

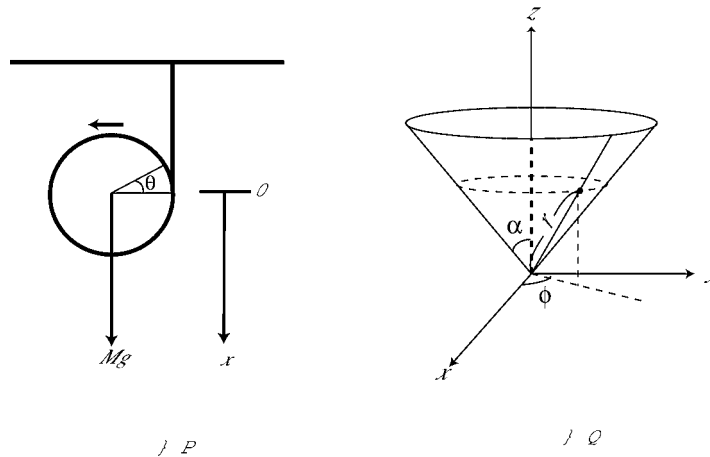
**問 2** 図 2 のように、軸が鉛直で頂点が下に向いている滑らかな円錐面 (半頂角  $\alpha$ ) の内側に沿ってすべる質量  $m$  の質点の運動について考える。質点の位置を 3 次元極座標  $(r, \alpha, \phi)$  を用いて表すことにする。重力加速度を  $g$  とするとき次の問いに答えよ。ただし、空気抵抗および摩擦は無視できるものとする。

**2-1.** この系の運動エネルギー  $T$  と位置エネルギー  $U$  を与えよ。また、 $r, \phi$  に関する運動方程式をたてよ。

**2-2.**  $\phi$  に共役な運動量  $p_\phi$  を求め、これが保存量であることを示しなさい。

**2-3.** 質点が  $r$  座標  $r_0$  において水平に初速度  $v_0$  で運動を始めたとする。その後、質点が円運動を行うための  $v_0$  の条件を求めよ。

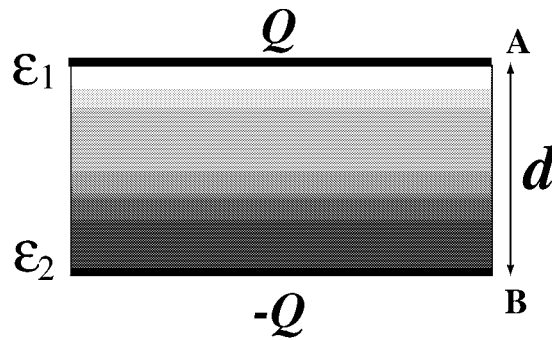
**2-4.** 前問の円運動において  $p_\phi$  の値を変えないようにして質点の  $r$  座標を少しだけずらした。  $r = r_0 + \rho$  とおいて、そのまわりの微小振動の周期  $T$  を求めなさい。



## 問題 II

問 1 図のような誘電率が一方の極板 A のところで  $\epsilon_1$  で、それから距離に比例して増加し他方の極板 B のところで  $\epsilon_2$  になるように誘電体をつめた、間隔  $d$  で極板面積  $S$  の平行平板コンデンサーを考える。但し電極の端での電場の乱れを無視する。

- 1-1. 電荷  $Q$  の真電荷を極板 A に与え、電荷  $-Q$  の真電荷を極板 B に与えたとき極板 A から距離  $x$  での電場を求めよ。
- 1-2. 次に極板間の電位差  $V$  を求め、この平行平板コンデンサーの容量  $C$  を求めよ。
- 1-3. このコンデンサーを時刻  $t = 0$  で抵抗  $R$  を持つ外部抵抗で極板 A、B を繋ぎ、放電させた。時刻  $t$  に流れる電流  $I(t)$  を求めよ。
- 1-4. 放電が完了するまでに抵抗で消費されたエネルギーは初めにコンデンサーに蓄えられていたエネルギーに等しい事を示せ。



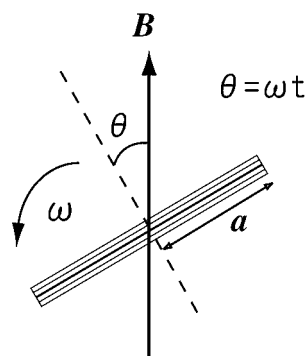
問 2 図のように半径  $a$ 、巻数  $N$ 、抵抗  $R$ 、自己インダクタンス  $L$  の円形コイルを磁束密度  $B$  の一様な磁場中で磁場に垂直な軸のまわりに角速度  $\omega$  で回転させた場合を考える。

2-1. 初めに自己インダクタンスが無視できる場合を考え、時刻  $t = 0$  で磁場の方向と円形コイルの中心軸が一致していたとして、時刻  $t$  でのコイルに生じる起電力  $E(t)$  とコイルに流れる電流  $I(t)$  を求めよ。

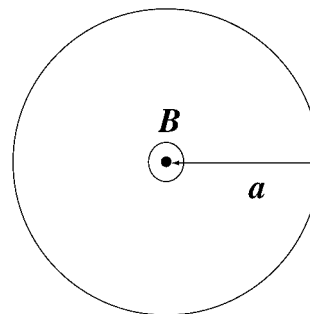
2-2. 前問で求めたコイルに流れる電流の実効値 (Root Mean Square 値)  $\hat{I}$  を求めよ。ここで電流の実効値  $\hat{I}$  は、電流の周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  を用いて次式で定義される。

$$\hat{I} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I(t)]^2 dt}$$

2-3. 最後に自己インダクタンスを考慮した場合に、電流  $I(t)$  を求める微分方程式を示せ。(解く必要はない。)



横から見た図



$\theta = 0$  の時真上から見た図

### 問題 III

ポテンシャル障壁による波束の反射を考える。粒子の質量は  $m$  として、以下の問に答えよ。

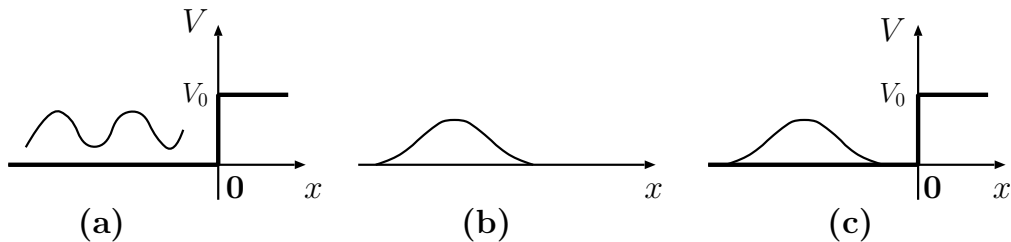
問 1 まず図 (a) のように、ポテンシャル障壁に  $x = -\infty$  から波数  $k$  の平面波が入射する状況を考える。粒子のエネルギーはポテンシャル障壁の高さ  $V_0$  よりも小さく、領域 I ( $x < 0$ ) と領域 II ( $x \geq 0$ ) における定常状態波動関数が次のように表せるとして、以下の問に答えよ。

$$\phi_I(x) = \exp(ikx) + A(k) \exp(-ikx), \quad \phi_{II}(x) = B(k) \exp(-\rho x).$$

1-1. 領域 II でのシュレディンガー方程式を解いて  $\rho$  を求めよ。

1-2.  $x = 0$  での波動関数の接続条件から、前問での係数  $A(k), B(k)$  を  $k, \rho$  を用いて表せ。

1-3. 透過率、および反射率を求めよ。



問 2 次に図 (b) のように、ポテンシャルが無い場合に次式の波束を考える。( $a, k_0$  は定数)

$$\psi_i(x, t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} g(k) e^{ikx - i\omega(k)t}, \quad g(k) = \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{a^2}{2}(k - k_0)^2\right].$$

ここで、波数  $k$  での角振動数は  $\omega(k) = \hbar k^2 / 2m$  と与えられる。

2-1. 時刻  $t = 0$  における運動量期待値  $\langle p \rangle$  と運動量の揺らぎ  $\Delta p$  を求めよ。

2-2. 時刻  $t$  における波束の中心は、 $\langle x \rangle_t = v_g(k_0)t$  と求められる。 $v_g(k_0)$  を求めよ。

(ヒント:  $k_0$  近辺の波数で位相が停留的になることから求められる。)

問 3 前問の結果を組み合わせて、図 (c) のようにポテンシャル障壁に波束が入射する状況を考える。このとき、波動関数は問 1 で求めた定常状態波動関数を重ね合わせて求めることができ、領域 I ( $x < 0$ ) において次のように表せる。

$$\psi(x, t) = \psi_i(x, t) + \psi_r(x, t), \quad \psi_r(x, t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} g(k) \exp[-ikx - i\omega(k)t - 2i\delta(k)]$$

ここで位相のずれ  $\delta(k)$  は、問 1 の係数と  $A(k) = \exp(-2i\delta(k))$  の関係にある。また、フーリエ成分  $g(k)$  は問 2 で与えられたものであり、波数の広がり十分に小さく、波数  $k_0$  におけるエネルギーはポテンシャル障壁の高さ  $V_0$  に比べて十分小さいとする。十分に時間がたつと、 $k_0$  近辺の波数において位相が停留的である条件から反射波束の中心が  $\langle x \rangle_t = -v_g(t - \tau)$  のように振る舞うことが示される。

3-1.  $\tau$  を求めよ。また  $\tau$  がどのように解釈できるか述べよ。

## 問題 IV

問 1  $N$  個の粒子が体積  $V$  の容器に入っている系を考える。 $k$  はボルツマン定数として以下の間に答えよ。ただし、 $\langle A \rangle$  は物理量  $A$  の熱平均値とする。

1-1. 温度  $T$  におけるこの系のエネルギー  $E$  のゆらぎ  $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$  が以下の関係を満足することを示せ。

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = kT^2 \left( \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_V$$

1-2. 系が単原子分子の理想気体の場合、 $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$  を  $k$ 、 $N$ 、 $T$  を用いて表せ。

問 2 一辺の長さ  $L$ 、体積  $V = L^3$  の立方体の箱が温度  $T$  に維持されているとして、以下の間に答えよ。

2-1. 質量  $m$  の単原子分子が 1 個箱に入っている。その分子のエネルギーは、

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

で表すことができる。ここで、 $\hbar$  はプランク定数を  $2\pi$  で割ったもの、 $n_i$  ( $i = x, y, z$ ) は任意の正の定数である。この 1 個の分子の分配関数  $Z_1$  が次式で表わされることを示せ。

$$Z_1 = V \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

ただし、分配関数の和の計算は積分で置き換えて近似し、また次式を利用せよ。

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}/2$$

2-2. この箱の中に同一の単原子分子を  $N$  個入れた理想気体を考える。この系の分配関数  $Z_N$  を求めよ。さらに、その分配関数を使いヘルムホルツの自由エネルギー  $F$ 、およびエントロピー  $S$  を求めよ。ただし、近似式  $\log N! \approx N \log N - N$  を用いよ。

2-3. 上記 2-2. で求めたヘルムホルツの自由エネルギー  $F$ 、およびエントロピー  $S$  が示量的であることを示せ。

2-4. 上記 2-2. で求めたヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  からこの系の圧力  $P$  を求めよ。

## 問題 V

以下の問に解答せよ. 解答にあたっては結果だけでなく導出過程も記すこと.

問 1 次の積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

の値を求めよ.

問 2  $|x| \leq 1$  とするとき,  $|z|$  を十分小さくすれば

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n$$

と展開される. この時

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

がなりたつことを示せ.

問 3 三次元行列

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 9 & 1 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$A^5 - 2A^4$$

の値を求めよ.

問 4 平面  $(x, y)$  上の点 P が, 次の微分方程式に従って運動するものとする.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\lambda - x^2 - y^2)x - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + (\lambda - x^2 - y^2)y \end{aligned}$$

点 P は  $t = 0$  において  $(x, y) = (1, 0)$  にあったとする. 点 P の描く軌道がパラメータ  $\lambda$  によってどのように変わるかの概略図を示せ.



## 問題 VI

問 1 固体惑星の質量が大気の質量に比べ十分に大きく、大気が固体惑星に束縛されている場合、大気の圧力  $p$  と密度  $\rho$  との間には以下の静水圧平衡の関係が成り立つ。

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM_0}{r^2} \rho. \quad (1)$$

ここで  $r$  は惑星中心からの距離、 $M_0$  は半径  $r_0$  の固体惑星の質量、 $G$  は万有引力定数である。大気は理想気体でその組成は一定であるとし、大気分子 1 個あたりの質量を  $m$  とする。このとき以下の問に答えよ。

1-1. 固体惑星表面からの高さ  $z \equiv r - r_0$  が  $r_0$  に比べ小さい場合、式 (1) は以下のように近似できる。

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

ここで  $g = GM_0/r_0^2$  である。このとき大気は等温であるとして圧力スケールハイト (圧力が  $1/e$  になる高さ) を求めよ。

1-2. 圧力と密度、温度  $T$  との間には以下の関係が成り立つとする。

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

ここで  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$  はそれぞれ  $r = r_0$  での圧力、密度および温度、 $\gamma$  はポリトロピック指数と呼ばれる定数である。この関係と式 (1) を用いて圧力  $p$  を  $r$  の関数として表せ。

1-3. 惑星から無限に離れた点において圧力が 0 にならない場合、大気は静水圧平衡を維持できず、その結果大気は宇宙空間へ散逸する。圧力分布が 1-2 で求めた解で与えられる場合に大気が宇宙空間へ散逸する条件を、以下の無次元パラメータ

$$\lambda_0 \equiv \frac{GM_0 m}{r_0 k T_0}$$

を用いて表せ。ここで  $k$  はボルツマン定数である。

1-4. 1-3 で考察した大気の散逸過程は「ハイドロダイナミックエスケープ」と呼ばれる。これ以外の大気の散逸過程の 1 つについて、実際の惑星大気において働いた例を交えながら 300 字程度で説明せよ。