（平成 18 年 8 月 24 日実施）

平成 19 年度

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	2 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 図のように、長さ $3L$ の一様な細い剛体棒の端から L の点を支点とする鉛直面内での回転運動を考える。剛体棒の質量を M、鉛直線から反時計回りの方向にはかった回転位置の角度変数を θ、重力加速度を g とするとき次の問いに答えよ。ただし、空気抵抗および支点における摩擦は無視できるものとする。

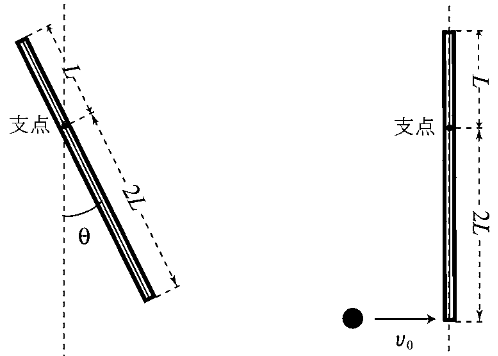


図1-1　図1-2

はじめに、図 1-1 のように剛体棒のみの場合について考える。一様な細い剛体棒の慣性モーメント I は、棒の線密度を ρ、支点からの距離を r として $I = \int r^2 \rho dr$ となる。

1-1. 棒の線密度 ρ を求め、棒の支点のまわりの慣性モーメントが $I = ML^2$ であることを示せ。

1-2. 角度変数 θ を用いて系の運動エネルギー T と位置エネルギー U を表せ。ただし、$\theta = 0$ で $U = 0$ であるとする。

1-3. 棒の支点のまわりの力のモーメント N を角度変数 θ の関数として表せ。また、角度変数 θ に関する運動方程式を求めよ。

1-4. 時刻 $t = 0$ における初期条件を $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \omega_0$ とする。初めの角速度 ω_0 が小さいときには、剛体棒は振動運動をするが、ω_0 が大きくなると回転運動をする。剛体棒が回転運動をするのに必要な ω_0 の大きさを求めよ。

次に、図 1-2 のようにこの剛体棒が静止しているときに、剛体棒と同じ質量 M の小物体が飛んできて剛体棒の下端に速度 v_0 で水平に衝突した。

1-5. 飛んできた物体と剛体棒が一体になった場合、剛体棒が振動ではなく回転をするために必要な衝突前の小物体の速度 v_0 の条件を求めよ。

1-6. 飛んできた物体と剛体棒がはねかえり係数 e で衝突し剛体棒のみが微小振動をした場合、$v_0^2/gL \ll 1$ として剛体棒の振動の周期を求めよ。

問 2 ばねとおもりからなる系の連成振動について考える。

はじめに、図 2-1 のように 2 つの等しい質量 m の質点を、質量の無視できる 3 つのばね（ばね定数 k）で連結する場合を考える。2 つの質点の運動は 1 次元に制限されており、それぞれのつりあいの位置からの変位を u_1, u_2 とする。

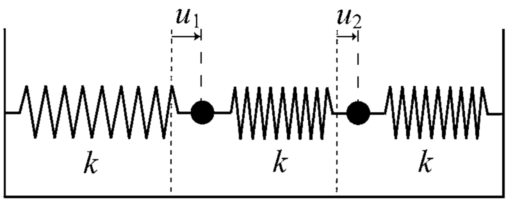


図2-1

2-1. この系の運動エネルギー T と位置エネルギー U を与えよ。また、u_1, u_2 に関する運動方程式をたてよ。

2-2. 運動方程式の解を $u_1(t) = A_1 \cos \omega t$, $u_2(t) = A_2 \cos \omega t$ と仮定し (A_1, A_2, ω は定数)、これが解となるような 2 つの基準振動の振動数 ω を求めよ。

2-3. 2 つの基準振動におけるそれぞれの振幅 A_1, A_2 の比を求め、振動の様子を図示せよ。

次に、図 2-2 のように質量 m の N 個の質点をばね定数 k の $N+1$ 個のばね（質量は無視できる）で連結する場合を考える。質点の運動は 1 次元に制限されており、左から n 番目の質点のつりあいの位置からの変位を u_n とする。

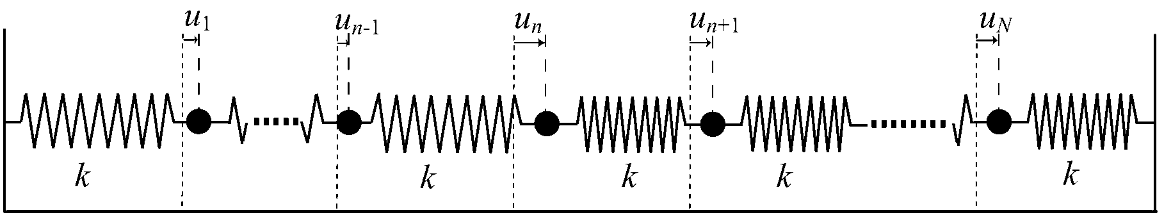


図2-2

2-4. n 番目の質点が満たすべき方程式を求めよ。

2-5. この系の基準振動を求める。運動方程式の解を $u_n(t) = A_n \cos \omega t$ と仮定し (A_n, ω は定数)、A_n に関する連立方程式を求めよ。また、基準振動の振幅を $A_n = C \sin pn$ として（C は定数）取り得る p の値を求め、さらにそれを用いて振動数 ω を表せ。

2-6. 最後に連続極限を考える。平衡状態にあるときの図 2-2 の質点間の間隔を a とし、3 つの量 $\rho = m/a$, $Y = ka$, $L = (N+1)a$ を一定に保ったまま $a \to 0$ の極限を考える。この場合、n 番目の質点のつりあいの位置 $x = na$ は連続変数にとってよい。$u_n(t) = u(x,t)$ とするとき、$u(x,t)$ の満たす方程式を求めよ。

問題 II

問 1 以下の設問に答えよ。

1-1. 空気中に置かれた半径 a の誘電率 ϵ を持つ誘電体球内に全電荷 Q が一様に分布している。ガウスの法則を使って、球の中心 O から距離 r の点での球内及び球外の電場を求めよ。但し空気の誘電率は ϵ_0 とせよ。

1-2. 図 1 のように、大きさ I の定常電流が流れている直線状の導線と、そこから距離 R にある点 P がある。この電流が作る磁場のうち、点 P を見込む角が θ_1, θ_2 である点 A、B を端点に持つ導線部分を流れる電流の寄与を考える。ビオ・サバールの法則を使って、この部分の電流が点 P に作る磁場の大きさが

$$H_{\mathrm{AB}}(\mathrm{P}) = \frac{I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

となることを示せ。またこの磁場の向きを答えよ。必要ならば図中の座標系を用いてよい。

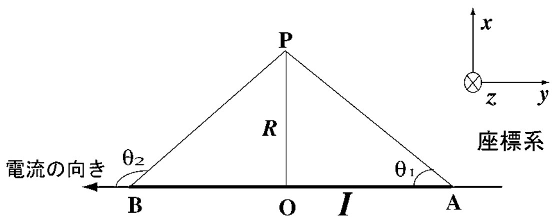


図 1

1-3. 図 2 のように、1 辺の長さが a の正方形の導線回路 ABCD に大きさ I の定常電流を流したとき、中心軸上 z の距離の点 P に作られる磁場の大きさと向きを求めよ。(但し、図中の補助記号は最終結果に使用せずに、z, a, I を使って表せ。)

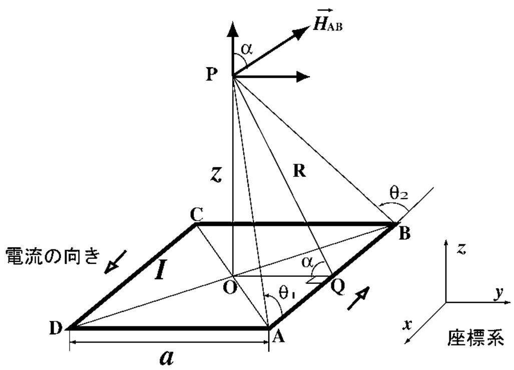
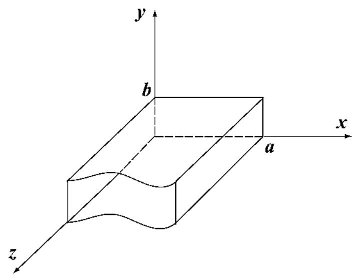


図 2

問 2 図のように、x 軸方向に長さ a、y 軸方向に長さ b を持ち、z 軸方向に無限に長い完全導体で囲まれた、一様な媒質中を伝播する電磁波について考える。媒質の誘電率を ϵ、透磁率を μ として以下の問に答えよ。



2-1. 一様な媒質中で電荷も電流も無いとき、角周波数 ω で振動している電場と磁場は、$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \boldsymbol{E}(x,y,z)e^{i\omega t}$、$\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \boldsymbol{H}(x,y,z)e^{i\omega t}$ と変数分離できる。このときマックスウェル方程式から次のヘルムホルツ方程式が成り立つことを示せ。

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E}(x,y,z) + \omega^2 \epsilon\mu \boldsymbol{E}(x,y,z) = 0 \tag{1}$$
$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{H}(x,y,z) + \omega^2 \epsilon\mu \boldsymbol{H}(x,y,z) = 0 \tag{2}$$

次に電磁波が z 軸方向に伝播定数 β で伝播する場合を考える。このとき電磁場の空間成分を z 軸に垂直な成分と平行な成分に分解して次のように表す。

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \boldsymbol{E}(x,y)e^{-i(\beta z-\omega t)} = [\boldsymbol{E}_\perp(x,y) + \boldsymbol{e}_z E_z(x,y)]e^{-i(\beta z-\omega t)}$$
$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \boldsymbol{H}(x,y)e^{-i(\beta z-\omega t)} = [\boldsymbol{H}_\perp(x,y) + \boldsymbol{e}_z H_z(x,y)]e^{-i(\beta z-\omega t)}$$

ここで添え字 $\perp$ は z 軸に垂直な成分についての量を意味する。また、$\boldsymbol{e}_z$ は z 軸方向の単位ベクトルである。

2-2. z 軸に垂直な成分 $\boldsymbol{E}_\perp$、$\boldsymbol{H}_\perp$ は E_z、H_z を用いて次式のように表現できることを示せ。

$$\boldsymbol{E}_\perp(x,y) = \frac{-i}{\beta_\perp^2}\left(\beta \boldsymbol{\nabla}_\perp E_z(x,y) - \omega\mu \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{\nabla}_\perp H_z(x,y)\right) \tag{3}$$
$$\boldsymbol{H}_\perp(x,y) = \frac{-i}{\beta_\perp^2}\left(\omega\epsilon \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{\nabla}_\perp E_z(x,y) + \beta \boldsymbol{\nabla}_\perp H_z(x,y)\right) \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{\nabla}_\perp = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$ であり、$\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ はそれぞれ x 軸、y 軸方向の単位ベクトルである。また $\beta_\perp^2 = \omega^2\epsilon\mu - \beta^2$ である。

2-3. 前問から $\boldsymbol{E}_\perp$、$\boldsymbol{H}_\perp$ は E_z から決まる部分、H_z から決まる部分に分解できることがわかる。E_z から決まる部分を TM 波と呼ぶ。今、図のような完全導体に囲まれた媒質中を伝播する TM 波の E_z が従うべき方程式と境界条件を述べよ。実際に解く必要はない。

（平成 18 年 8 月 24 日実施）

平成 19 年度

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

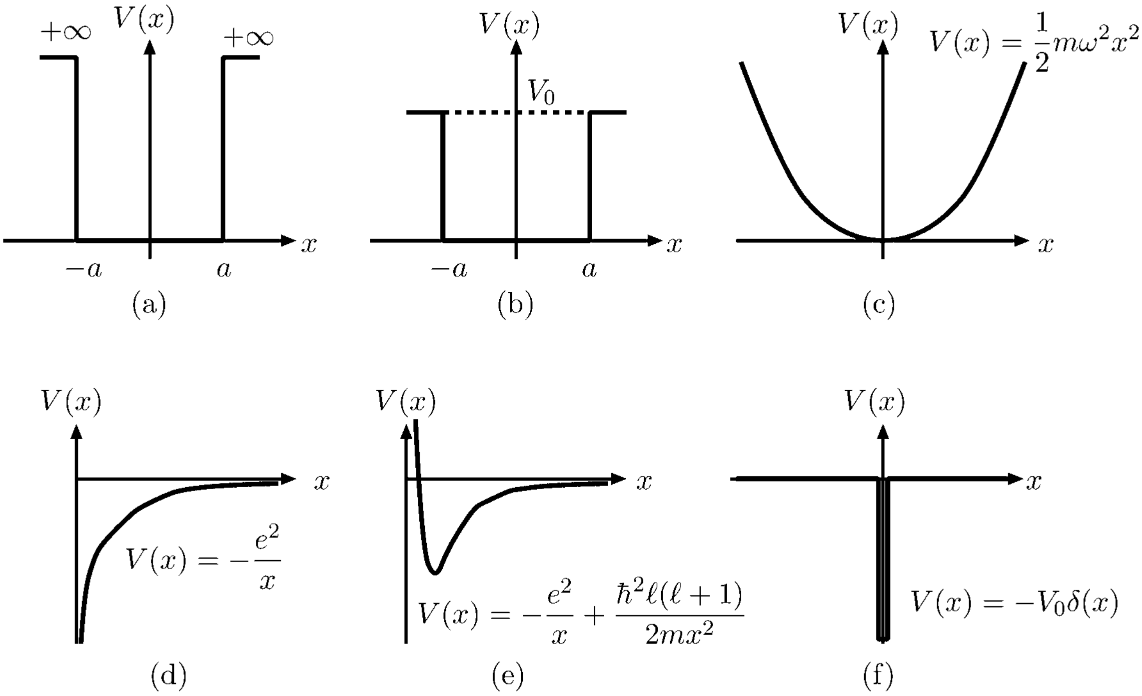
受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者：**問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。
  - 宇宙物質進化論・宇宙物理化学・惑星物理学・地球流体力学・気象学を志望するものは**問題 III, IV, V, VI** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	2 枚
	問題 VI	3 枚
解答紙	2 問題分	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 一次元空間を質量 m の粒子が、次の (a)–(f) のポテンシャル中を運動している。これらのポテンシャルについての以下の設問に答えなさい。解答は答えのみでよい。
ただし、(d)、(e) のポテンシャルでは、粒子は $x \geq 0$ の空間のみを運動しているとする。また、V_0, ω, a, e は正の実数、ℓ は自然数である。



1-1. それぞれのポテンシャルで束縛状態はいくつ存在するか？ 無限個、2 つ以上の有限個、1 つ、0、不定 (ポテンシャルの強さによる) の中から選んで答えよ。

1-2. それぞれのポテンシャルで連続状態は存在するか？ 存在する場合には、そのエネルギーの範囲を述べよ。

1-3. これらのポテンシャルによりモデル化できる実際の系の例を挙げよ。(a)–(f) のうち、4 つを選んで答えよ。(近似的に表す場合でもよい。また $x \geq 0$ の領域に制限して x を動径変数 r とみなしてもよい。)

1-4. 基底状態以外に束縛状態をもつポテンシャルを 2 つ選び、第一励起状態のエネルギーと波動関数を求め、波動関数の概形をグラフで示せ。(規格化は行わなくてよい。)

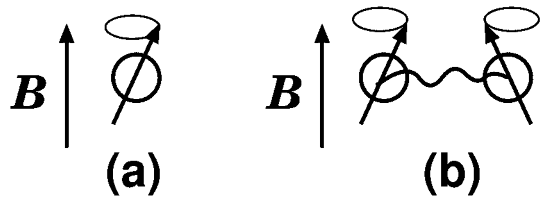
問 2 一様な静磁場中にスピン 1/2 をもった粒子が静止している (下図 (a))。このとき、z 軸正方向、および逆方向を向いたスピン波動関数、パウリ行列の x 成分が

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる表示において、スピン演算子、ハミルトニアンはパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}$ を用いてそれぞれ次のように与えられる。(以下では $\hbar = 1$ とする。)

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \qquad H = -\mu\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} = -\mu\left(\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z\right) \tag{1}$$

磁束密度は強さが $B = |\boldsymbol{B}|$ で、z 軸正方向を向いているとする。また、μ は定数である。以下の設問に答えよ。



2-1. 式 (1) のハミルトニアン H のエネルギー固有値を求めよ。

2-2. x 軸正方向を向いたスピン波動関数を求めよ。(波動関数は規格化すること。)

2-3. 時刻 $t = 0$ でスピンが x 軸正方向を向いていたとする。時刻 t におけるスピンの x 成分の期待値を求めよ。

次に、この磁場中でスピン 1/2 をもった 2 つの粒子がスピンを通じて相互作用している場合を考える (上図 (b))。このときスピン演算子、ハミルトニアンが次のように与えられるとする。

$$\boldsymbol{s}_1 = \frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{2}, \qquad \boldsymbol{s}_2 = \frac{\boldsymbol{\sigma}_2}{2}, \qquad H = -\mu\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{B} - \mu\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{B} + v\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2 \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}_i$ $(i = 1, 2)$ は i 番目のスピンについてのパウリ行列、μ, v は定数である。

2-4. 2 つの 1/2 のスピンの合成スピン S が 1、および 0 の状態

$$|S = 1, S_z = -1\rangle, \quad |S = 1, S_z = 0\rangle, \quad |S = 1, S_z = 1\rangle, \quad |S = 0, S_z = 0\rangle$$

をスピン波動関数 $|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1, |\uparrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_2$ の積 (または積の和) を用いて表せ。($|\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_i$ は i 番目のスピンが z 軸正方向、および逆方向を向いたスピン波動関数である。)

2-5. 式 (2) のハミルトニアンを合成スピン演算子 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2$ を用いて表せ。また、ハミルトニアンの固有値を全て求めよ。

2-6. 時刻 $t = 0$ において $\langle S_x \rangle = 1$ の状態にあったとする。時刻 t における合成系のスピン波動関数を求めよ。

問題 IV

問 1 理想気体に対して以下の問に答えよ。ただし、S はエントロピー、T は温度、C_V は定積モル比熱、p は圧力、V は体積、R は気体定数とする。

1-1. n モルの理想気体に対して $TdS = nC_V dT + pdV$ が成り立つとして、この理想気体のエントロピー S が次のようになることを示せ。

$$S = S_0 + nC_V \log \frac{T}{T_0} + nR \log \frac{V}{V_0}$$

ここで、S_0 は $T = T_0, V = V_0$ におけるエントロピーである。

1-2. 体積 V_1 の n モルの理想気体が真空中へ断熱的に膨張し、最終的に体積が V_2 になったとする。この過程でのエントロピー変化 ΔS を求めよ。

1-3. A、B 2 種類の粒子からなる理想気体が隔壁で隔てられた断熱容器に封入されている。ここで、A、B の気体はそれぞれ n_{A}、n_{B} モル、体積 V_{A}、V_{B} であり、両気体で圧力 p、温度 T は等しいとする。隔壁を取り去り 2 種類の気体を混合させ、しばらくして熱平衡状態に達したときの系全体のエントロピー変化 ΔS を求めよ。

問 2 互いに相互作用しない N 個のスピン系を考える。スピンは磁気モーメント μ をもち、上向き、あるいは下向きの状態しかとらないとする。N が十分大きな数として以下の問いに答えよ。

2-1. スピンが上向きの個数を $N_\uparrow$ 、下向きの個数を $N_\downarrow$ とし、その差が $n_s = N_\uparrow - N_\downarrow$ のとき、系のとりうる状態数 $W(N, n_s)$ を求めよ。

2-2. $n_s/N \ll 1$ が成り立つとして $W(N, n_s)$ を近似し、以下の式が成り立つことを示せ。

$$W\left(N, n_s\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} 2^N \exp\left(-\frac{n_s^2}{2N}\right)$$

必要ならば次の公式を用いてよい。

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \ (N \gg 1), \qquad \log(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 \ (x \ll 1)$$

2-3. 系の磁気モーメントは $M = \mu n_s$ と表される。**2-2** の $W\left(N, n_s\right)$ を用いて、系の磁気モーメントの平均値 $\langle M \rangle$、およびそのゆらぎ $\sqrt{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2}$ を求めよ。必要ならば次の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

次に、スピン系に温度 T で上向きスピンの方向に磁場 H が印加された場合を考える。磁気モーメント μ は H と同じ向きおよび反対向きのときそれぞれ $-\mu H$ および $+\mu H$ のエネルギーをもつ。

2-4. $n_s = N_\uparrow - N_\downarrow$ のときのヘルムホルツの自由エネルギー $F(H, T, n_s)$ を求めよ。ここで系のエントロピー S が

$$S \approx k_B \left(-\frac{N+n_s}{2} \log\frac{N+n_s}{2N} - \frac{N-n_s}{2} \log\frac{N-n_s}{2N}\right)$$

で表されることを使え。

2-5. 上記 **2-4** で求めたヘルムホルツの自由エネルギー F の極小の条件から、熱平衡での系の磁気モーメント $\langle M \rangle_T = \mu \langle n_s \rangle_T$ を求めよ。ここで、$\langle n_s \rangle_T$ などは n_s の熱平衡値を表す。

2-6. スピン 1 個の分配関数 $Z_1(H, T)$、および全スピン N 個の分配関数 $Z_N\left(H, T\right)$ を求めよ。

2-7. 分配関数 $Z_N(H, T)$ より、系全体のヘルムホルツの自由エネルギー $F(H, T)$、および系の磁気モーメント M を求めよ。

問題 V

問 1 次の設問 (**1-1**〜**1-3**) に答えなさい。

1-1. 3 個の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (1,1,1), \boldsymbol{b} = (1,-2,3), \boldsymbol{c} = (2,1,\alpha)$ を考える。この 3 つのベクトルが互いに一次従属であるための α の値を求めなさい。

1-2. 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = f(x)$$

を

$$x = 0 \text{ で } y = 1,\ \frac{dy}{dx} = 0$$

の境界条件のもと、$f(x)$ が次の場合について解きなさい。

(1) $f(x) = 0$ の場合。

(2) $f(x) = 2\cos x$ の場合。

(3) $f(x) = \cos 2x$ の場合。

1-3. ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ を

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

とし ($\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は、x 方向、y 方向、z 方向の単位ベクトル)、

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

であるとき、スカラー関数 $\varphi(x,y,z)$ を

$$\varphi(x,y,z) = \int_\alpha^x A_x(x',y,z)dx' + \int_\beta^y A_y(\alpha,y',z)dy' + \int_\gamma^z A_z(\alpha,\beta,z')dz'$$

(α,β,γ は、任意の定数) とすると、

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$$

であることを示しなさい。

問 2 次の設問 (**2-1**〜**2-4**) に答えなさい。

2-1. $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して次の式を導きなさい。

(1)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(2)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

2-2. 前問 **2-1** の結果を用いて、次の関係を導きなさい。

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdots$$

2-3. 次の値を求めなさい。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

2-4. 前問 **2-3** の結果を使って、次の値を求めなさい。

(1)
$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

(2)
$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

必要に応じ、$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において、$\sin 2\theta \leqq \dfrac{4}{\pi}\theta$ の関係を利用してよい。

問題 VI

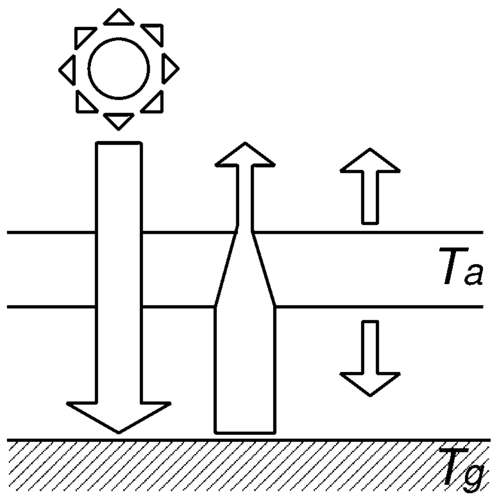
以下の問 1、問 2、問 3 から 2 問を選択し解答せよ。

問 1 次の設問 (**1-1** ∼ **1-5**) に答えよ。

1-1. 惑星の軌道上における太陽放射フラックスを S、惑星のアルベドを A とするとき、惑星が吸収する単位時間単位面積あたりのエネルギーを求めよ。

1-2. 上記 **1-1** で求めたエネルギーと同じだけのエネルギー束を宇宙空間へ射出する黒体放射温度を、惑星の平衡温度という。惑星の平衡温度 T_e を S, A を用いて表せ。ここで、惑星の温度は一様であるとし、ステファン・ボルツマン定数は σ とする。

1-3. 太陽放射に対しては透明だが地面からの赤外放射の一部を吸収し、それ自体も赤外放射を宇宙空間と地面に向けて射出する温度一定の大気層が惑星に存在する場合を考える (下図)。地面からの赤外放射フラックスが大気層に吸収される割合と、大気層の射出率はともに ε とする。ここで射出率とは、大気層と同じ温度の黒体放射フラックスに対する大気層が放つ赤外放射フラックスの比である。このとき地面と大気層における放射平衡の式をそれぞれ立てよ。ただし、地面と大気層の温度はそれぞれ T_g, T_a とし、地面の射出率は 1 とする。



1-4. 上記の **1-3** で立てたつりあいの式を解いて、T_g と T_a を平衡温度 T_e を用いて表せ。

1-5. $0 < \varepsilon < 1$ であることに注意し、上記の **1-3** で求めた T_g と T_a の平衡温度 T_e に対する大小関係をそれぞれ示せ。 また、これらの関係は現実の惑星大気の温度構造においてどのように現れているか、簡潔に述べよ。

問 2 回転系における密度一定の 2 次元の流体運動は、以下の式によって記述される。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

ここで、u, v はそれぞれ x, y 方向の速度、p は圧力、ρ は密度である。f はコリオリパラメータで $f = f_0 + \beta y$ とする。ここで f_0, β は定数である。

2-1. 式 (1)、(2)、(3) から、渦度 ζ

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

の時間変化を表す方程式を導け。

2-2. 式 (3) より、以下のように与えられる流線関数 Ψ を導入することができる。

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

u, v は小さいとして、式 (1), (2) において非線形項は無視できるとする。このとき以下のような波形の解

$$\Psi = \hat{\Psi}\exp[i(kx + ly - \omega t)]$$

を仮定した場合、k, l, ω のみたす関係式を求めよ。

2-3. 上記 **2-2** で求めた関係式を用いて、x 方向の位相速度 C_x および群速度 C_{gx} を求めよ。

2-4. 上記 **2-2** で求めた k, l, ω のみたす関係式によって特徴付けられる波は何と呼ばれているか。その名称を答えよ。また、この波が地球惑星の流体圏において働いている例を 1 つあげ、それについて 150 字程度で説明せよ。

問 3 以下の用語から 4 つを選び、それぞれについて 150 字程度で説明せよ。

(1) コンドライト

(2) 縞状鉄鉱床

(3) K-T 境界

(4) 暗い太陽のパラドックス

(5) ホットジュピター

(6) 磁気圏のカスプ領域

(7) オゾンホール

(8) フェレル循環

(9) ランパートクレーター

(10) 分子雲コア