

(平成 29 年 8 月 17 日実施)

## 平成 30 年度

### 北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午後）

#### 受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の間が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の間を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - － 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
  - － 惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI, VII の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚 (A4)
	問題 IV	2 枚 (A4)
	問題 V	1 枚 (A4)
	問題 VI	2 枚 (A4)
	問題 VII	3 枚 (A4)
解答紙	2 問題分	6 枚 (B4) (各問題 3 枚)
	問題 VII 作図用	1 枚 (B4)
草案紙	2 問題分	2 枚 (B4) (各問題 1 枚)

### 問題 III

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 質量  $m$  の粒子が固有振動数  $\omega$  で 1 次元調和振動している。位置座標演算子を  $\hat{x}$  とし、その共役な運動量演算子を  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$  とするとき、粒子のハミルトニアン  $\hat{H}$  は、

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で与えられる。

1-1. 以下の様に演算子  $\hat{a}$ 、 $\hat{a}^\dagger$  を定義する。交換関係  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$  を求めよ。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

1-2. 演算子  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  を導入し、その規格化された固有状態を  $|n\rangle$ 、その固有値を  $n$  とする。 $n = \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \geq 0$  と、 $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ 、 $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$  の関係を使うと、 $n$  は非負の整数であり、

$$\hat{a} |n\rangle = \alpha |n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \beta |n+1\rangle$$

の関係が成り立つことを示せる。定数  $\alpha$ 、 $\beta$  を求めよ。ただし、 $\alpha$ 、 $\beta$  は非負の実数とせよ。

1-3. ハミルトニアン  $\hat{H}$  を演算子  $\hat{N}$  を用いて表せ。また固有状態  $|n\rangle$  でのエネルギー固有値を求めよ。

1-4. この系の基底状態は  $|0\rangle$  である。固有状態  $|n\rangle$  を  $|0\rangle$  と演算子  $\hat{a}^\dagger$  を用いて表せ。

1-5.  $\bar{x} = \langle n | \hat{x} | n \rangle$ 、 $\bar{p} = \langle n | \hat{p} | n \rangle$  とするとき、固有状態  $|n\rangle$  での粒子の位置  $x$  と運動量  $p$  の不確定さを  $\Delta x = \sqrt{\langle n | (\hat{x} - \bar{x})^2 | n \rangle}$ 、 $\Delta p = \sqrt{\langle n | (\hat{p} - \bar{p})^2 | n \rangle}$  で定義する。 $\Delta x \Delta p$  を  $\hbar$  と  $n$  を用いて表せ。

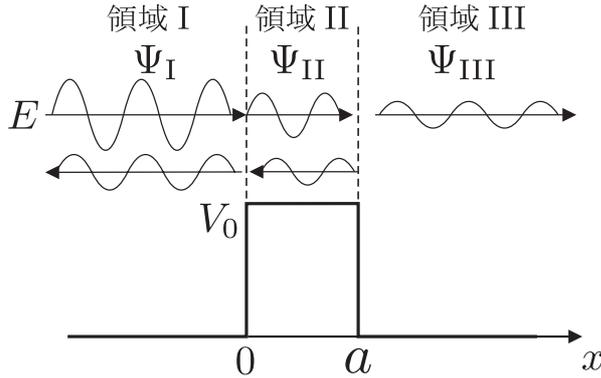
1-6. 基底状態  $|0\rangle$  の座標表示は  $\psi_0(x) = \langle x | 0 \rangle$  となる。 $\hat{a} | 0 \rangle = 0$  の関係式を使って、 $\psi_0(x)$  を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

の関係式を使ってもよい。

問 2 下図のような幅  $a$ 、高さ  $V_0 (> 0)$  の 1 次元箱型ポテンシャル障壁を考える。領域 I ( $x < 0$ )、領域 II ( $0 \leq x \leq a$ )、領域 III ( $x > a$ ) を図のようにとり、領域 I から  $x$  の正の方向へ質量  $m$ 、エネルギー  $E$  の粒子を入射した。

領域 I での入射粒子の波動関数を、波数  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  を用いて  $Ae^{ikx}$  とする。ポテンシャル境界での粒子の透過と反射を考慮すると、領域 I, II, III における波動関数  $\Psi_I, \Psi_{II}, \Psi_{III}$  は、それぞれ式 (1) (2) (3) で与えられる。ここで、エネルギーは  $E > V_0$  を満たしており、 $q = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$  とする。また  $B, C, D, F$  は未知定数である。



$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (1)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{iqx} + De^{-iqx} \quad (2)$$

$$\psi_{III}(x) = Fe^{ikx} \quad (3)$$

2-1. 粒子の確率密度の流れ  $j(x)$  は以下の式で与えられる。領域 III で、ポテンシャル障壁を透過した確率密度の流れを  $\hbar, k, m, F$  を用いて表せ。

$$j(x) = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi]$$

2-2. 入射波  $Ae^{ikx}$  が領域 III へ透過する確率  $T$  と領域 I へ反射される確率  $R$  を  $A, B, C, D, F$  を用いて表せ。

2-3. 透過率  $T$  を  $\hbar, E, V_0, m, a$  を用いて表せ。

2-4. 粒子はポテンシャル障壁により散乱されるため、透過率  $T$  は通常 1 より小さくなる。しかし、エネルギー  $E$  がある条件を満たすとき  $T = 1$  となる。 $x = 0, a$  での波動関数の接続条件を考え、 $T = 1$  となるために  $E$  が満たすべき条件を  $\hbar, V_0, m, a$  を用いて表せ。

2-5. 透過率  $T = 1$  のとき、領域 II での粒子の波長  $\lambda$  を  $a, n$  を用いて表せ。

## 問題 IV

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1  $N$  個の微視的状态  $j$  をもち、そのエネルギー  $\epsilon_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) が

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n < \epsilon_{n+1} < \epsilon_{n+2} < \dots < \epsilon_N$$

で与えられる系を考える。(基底状態が  $n$  重に縮退している)

この系が温度  $T$  の熱平衡状態にあるとき、カノニカル分布の方法を用いて以下の設問に答えよ。ただし、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$  であり、 $k_B$  は Boltzmann 定数をあらわす。

1-1. この系の分配関数  $Z(T)$  を  $\{\epsilon_j\}$  を用いて表し、状態  $j$  の実現確率  $p_j$  を求めよ。

1-2. この系の平均エネルギー  $E(T)$  が  $E(T) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$  で与えられることを示せ。

1-3.  $T \rightarrow 0$  および  $T \rightarrow \infty$  での平均エネルギー  $E(T)$  を  $\{\epsilon_j\}$  を用いて表せ。

1-4. この系の Helmholtz の自由エネルギー  $F(T)$ 、エントロピー  $S(T)$  を  $\{\epsilon_j\}$  を用いて表せ。

1-5.  $T \rightarrow 0$  および  $T \rightarrow \infty$  でのエントロピー  $S(T)$  の値を求めよ。

(問 2 は次頁)

問 2 体積  $V$  の容器内に  $N$  個の同種分子からなる気体が閉じ込められており、温度  $T$  の熱平衡状態にある。圧力を  $P$  とすると、この気体の状態方程式は

$$P = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

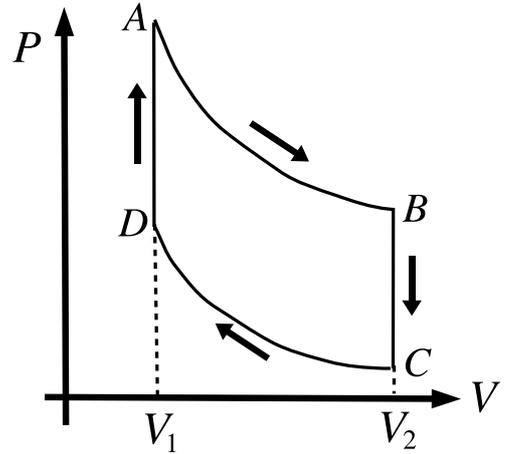
であり、内部エネルギー  $U$  は以下の様に与えられる。

$$U(T, V) = \frac{3Nk_B T}{2} - \frac{aN^2}{V}$$

ここで  $a, b$  は正の定数であり、 $V > Nb$  を満たす。

また、 $k_B$  は Boltzmann 定数である。

この気体を作業物質として上図の熱力学サイクルで表される熱機関を考える。 $A \rightarrow B$  は温度  $T_h$  の高温熱浴を接触させて気体の体積を  $V_1$  から  $V_2$  ( $> V_1$ ) まで変化させる準静的等温過程であり、 $B$  では高温熱浴を温度  $T_c$  ( $< T_h$ ) の低温熱浴に取り替え、体積を  $V_2$  に固定して平衡状態  $C$  になるまで待つ。 $C \rightarrow D$  は温度  $T_c$  の低温熱浴を接触させて気体の体積を  $V_2$  から  $V_1$  まで変化させる準静的等温過程であり、 $D$  では低温熱浴を温度  $T_h$  の高温熱浴に取り替え、体積を  $V_1$  に固定して平衡状態  $A$  になるまで待つ。このサイクル中、気体は常に臨界温度以上で、 $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0$  が成立しているものとする。この熱機関について以下の設問に答えよ。



2-1. 過程  $D \rightarrow A$  で、高温熱浴から気体に流入した熱  $Q_{D \rightarrow A}$  を求めよ。

2-2. 過程  $A \rightarrow B$  で、気体が外部にした仕事  $W_{A \rightarrow B}$  を求めよ。

2-3. 過程  $A \rightarrow B$  で、高温熱浴から気体に流入した熱  $Q_{A \rightarrow B}$  を求めよ。

2-4. 1 サイクルで高温熱浴から気体に流入した熱を  $Q_h$ 、気体が外部にした正味の仕事を  $W$  とすると、熱機関の効率は一般に  $\eta = \frac{W}{Q_h}$  で定義される。この熱機関の効率を  $V_1, V_2, T_h, T_c$  を用いて表し、それが Carnot 効率  $1 - \frac{T_c}{T_h}$  より小さいことを計算により示せ。