（令和 3 年 8 月 19 日実施）

令和 4 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	3 枚
	問題 II	3 枚
解答紙	問題 I, II	6 枚（各問題 3 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 直線分子の回転及び振動について古典的なモデルを使って考える。

図 1 のように、二原子分子を、質量が m_{A} の質点 A と質量が m_{B} の質点 B が質量の無視できる長さ l の細い棒で連結された剛体回転子モデルで近似する。また、この剛体回転子の質量中心を O とする。

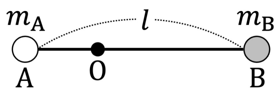

図 1

1-1. 点 O と質点 A の間の距離を求めよ。

1-2. 点 O を通り、棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを、換算質量 μ と棒の長さ l を使って表せ。

次に、三原子分子の振動について考える。原子 A と原子 B が CO_2 分子のように直線上に A-B-A と等間隔で結合している分子の振動を、質量 m_{A}, m_{B}, m_{A} の 3 つの質点が、質量の無視できる自然長 l、ばね定数 k の 2 本のバネで結合されたモデルで近似する。ただし、この分子の質量中心は並進運動をせず、また、この分子は質量中心のまわりに回転運動をしないものとする。

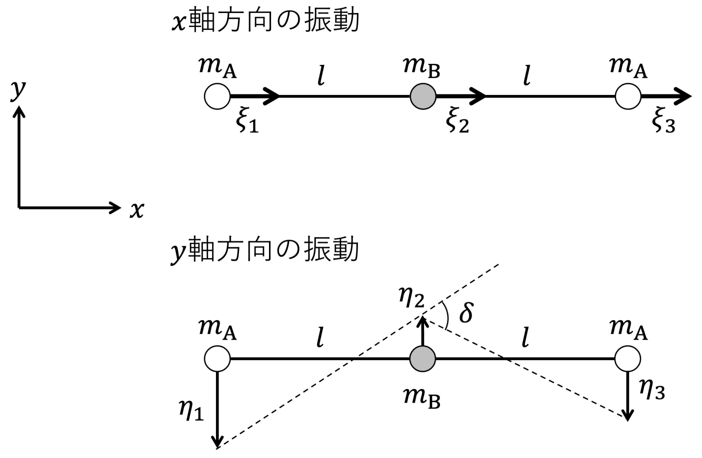

図 2

図 2 に示すように、つりあいの位置での分子の軸を x 軸、それに垂直な方向を y 軸とし、それぞれの原子のつりあいの位置からの微小な変位を (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3)、その位置での速度を $(\dot{\xi}_1, \dot{\eta}_1)$, $(\dot{\xi}_2, \dot{\eta}_2)$, $(\dot{\xi}_3, \dot{\eta}_3)$ とし、分子軸 (x 軸) 方向と分子軸外 (y 軸) 方向の微小振動を考える。

1-3. 並進運動をしない条件より、ξ_2 を ξ_1 及び ξ_3 を用いて、また、η_2 を η_1 及び η_3 を用いて表せ。

1-4. この系の x 軸方向の運動についてのラグランジアン L_x を書け。

1-5. この系の x 軸方向の振動の固有角振動数を求めよ。

1-6. 回転運動をしない条件より、η_3 を η_1 を用いて表せ。

1-7. **1-3.** と **1-6.** より、η_2 を η_1 を用いて表せ。

1-8. 図 2 に示すように、分子の微小な折れ曲がりの角度を δ とする。η_1, η_2, η_3 を l と δ を用いて表せ。ただし、微小な角度 θ〔ラジアン〕に対して、$\tan\theta \approx \theta$ が成り立つことを用いてよい。

1-9. 屈曲のポテンシャルエネルギーは $\frac{1}{2}k(l\delta)^2$ と表すことができるものとする。分子の y 軸方向の運動についてのラグランジアン L_y を、分子の微小な曲がり角 δ とその時間微分 $\dot{\delta}$ を用いて表せ。

1-10. δ の振動の固有角振動数を求めよ。

問 2 位置 $\boldsymbol{r}$ での質量分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ が作る重力ポテンシャル下での、質点の運動について考える。G を万有引力定数とすると、この重力ポテンシャルは、

$$\phi(\boldsymbol{r}) \equiv -G \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|} d^3 r'$$

と表される。位置 $\boldsymbol{r}$ に置かれた質量 m の質点がこの重力ポテンシャルから受ける力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ は、$\phi(\boldsymbol{r})$ の勾配によって、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -m\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ と記述される。また、重力ポテンシャルについて、Poisson 方程式 $\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G\rho(\boldsymbol{r})$ が成り立ち、電荷が作る静電場と同じようにガウスの法則を用いることができる。

2-1. 半径が R で、質量が M の一様な密度の球の中心から距離 $r(> R)$ の位置に、質量 m の質点があるとき、球が質点に及ぼす重力の大きさを求めよ。

2-2. a 及び M を定数とする球対称な重力ポテンシャル

$$\phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

を与える質量分布 $\rho(r)$ を求めよ。ただし、$r \equiv |\boldsymbol{r}|$ である。

2-3. 前問 (**2-2.**) の質量分布中で、中心から距離 r の位置において質量 m の質点が行う等速円運動の回転速度の大きさを求めよ。ただし、重力ポテンシャルを作る質量分布は、質点の運動を妨げないものとする。

問題 II

問 1 図 1 に示すように原点 O を含む yz 平面を境界面として、$x \leq 0$ の領域に半無限導体が接地されており、x 軸上の位置 $(h, 0, 0)$ に点電荷 q が固定されている。このとき、$x > 0$ の真空の領域の静電場と静電ポテンシャル（電位）を電気鏡像法を用いて考える。鏡映面は原点 O を含む yz 平面であり、点電荷 q の鏡映像は、x 軸上の位置 $(-h, 0, 0)$ の点電荷 $-q$ となる。ここで真空の誘電率を ϵ_0 とする。

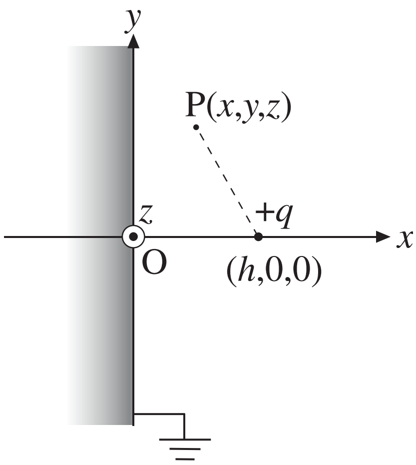

図 1

1-1. $x > 0$ の任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の電位 $V(x, y, z)$ は、点電荷 q と鏡映像の点電荷 $-q$ から求めることができる。 $V(x, y, z)$ を求めよ、また $V(0, y, z) = 0$ を確かめよ。

1-2. $x = 0$ の導体表面の近傍 $(x > 0)$ の電場 $\boldsymbol{E}(+0, y, z)$=(E_x, E_y, E_z) を求めよ。ただし、$+0$ は正の無限少量を表す。

1-3. 導体の表面上に誘起される電荷密度 $\sigma(0, y, z)$ を求めよ。また、原点 O での値 $\sigma(0, 0, 0)$ も求めよ。

1-4. 導体の表面上に誘起される電荷の総量を求めよ。

問 2 図２のように真空中に平行円板コンデンサーがある。コンデンサーの電極 A、B は半径 R の導体円板であり、間隔 $d(d \ll R)$ で中心軸を一致させて配置したものである。このコンデンサーの電極に外部電源から正弦波電圧 $V(t) = V_0 \sin \omega t$ （$V_0 > 0$ ）が印加されている。t は時刻、ω は角振動数である。ただし、電極 A、B の電荷 $q(t)$、$-q(t)$ は $t = 0$ で $q(0) = 0$ とする。このとき流れる電流 $I(t)$、電荷 $q(t)$ は周期的に増減した。コンデンサーの円板電極の端における電場の乱れは無視できるものとして、また外部電源の電圧の変化は十分ゆっくりであり、コンデンサーから電磁波として放出されるエネルギーは無視できるものとして、以下の問いに答えよ。

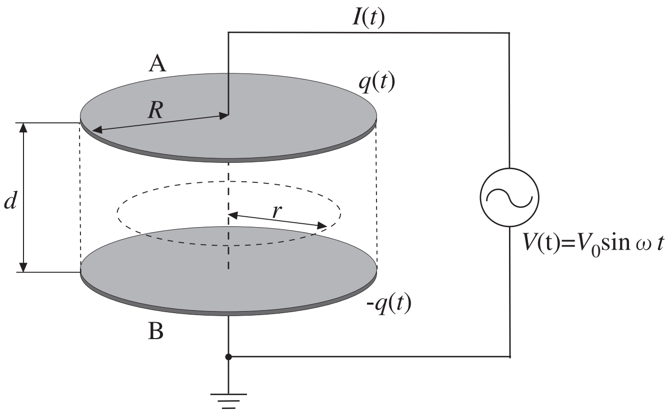

図２

2-1. コンデンサーの静電容量 C を ϵ_0、R、d を用いて表せ。

2-2. コンデンサーに蓄積する電荷 $q(t)$ とコンデンサーの電極に流れ込む電流 $I(t)$ を ϵ_0、R、d、 V_0、ω、t を用いて表せ。また、$t = 0$ から、電極 A の電荷 $q(t)$ が初めて最大になる時刻 t_m を求めよ。

2-3. コンデンサーに印加する電圧 $V(t)$ と電流 $I(t)$ から消費電力 $P(t) = V(t)I(t)$ を求めよ。また、$P(t)$ を使ってコンデンサーを $t = 0$ から t_m まで蓄電するのに必要な仕事 W を求めよ。

2-4. 電極 A、B 間に生じる電束密度 D から電束電流密度 $\frac{\partial D}{\partial t}$ を計算し、電束電流（変位電流）$I_D(t)$ を求めよ。また、２－２で求めたコンデンサーの電極に流入する電流 $I(t)$ と一致することを示せ。

2-5. 磁場ベクトル $\boldsymbol{H}$ と電束密度ベクトル $\boldsymbol{D}$ との関係式（マクスウェルの基本方程式 $\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$) から、コンデンサーの中心軸からの距離 r の関数として、距離 r の円周上に誘起する磁場の大きさ $H(r,t)$ を求めよ。また、横軸を距離 r、縦軸を $H(r,t)$ としてグラフを描け。

2-6. ポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$（$\boldsymbol{E}$ は電場ベクトル）で定義され、電磁場のエネルギーの流れの密度を表す。コンデンサーの中心軸からの距離 R の位置におけるポインティングベクトルの大きさ $S(R, t)$ を求めよ。また、$t = 0$ から t_m までの時間における、電極 AB 間の円筒側面でのポインティングベクトルの方向を求めよ。

2-7. ２－６で求めたポインティングベクトルをコンデンサーの円筒側面で面積積分を行い、コンデンサーに流入する単位時間当たりのエネルギーを求めよ。また、$t = 0$ から t_m までの時間にコンデンサーに流入するエネルギーの合計を計算し、２－３で求めた仕事 W と一致することを示せ。