（平成 27 年 8 月 17 日実施）

平成 28 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

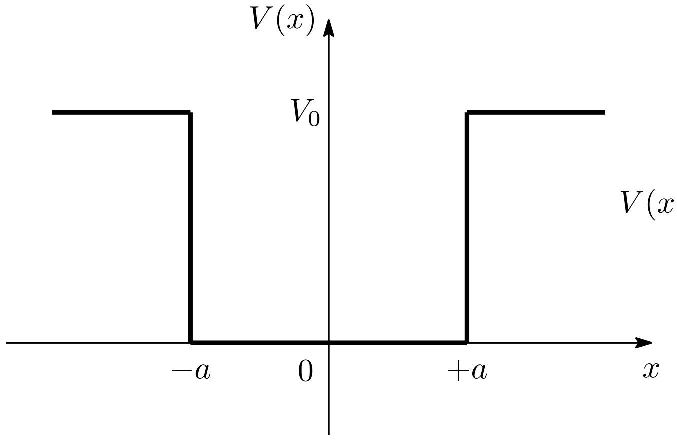
受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）: **問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。
  - 理論惑星科学・惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは**問題 III, IV, V, VI,VII** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	3 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	2 枚
	問題 VI	3 枚
	問題 VII	2 枚
解答紙	2 問題分	6 枚（各問題 3 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 質量 m をもつ粒子が図 1 のような 1 次元井戸型ポテンシャル $V(x)$ 中にある。このときの束縛状態について、以下の問いに答えなさい。ただし、$\hbar$ はプランク定数である。



$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ V_0, & |x| > a \end{cases}$$

図 1

1-1. 束縛状態のエネルギー固有値 E は縮退していないことを示しなさい。

1-2. 束縛状態では、エネルギー固有関数 $\phi(x)$ は必ず偶関数か奇関数のどちらかであることを示しなさい。

以下では、エネルギー固有関数 $\phi(x)$ が偶関数である場合を考える。

1-3. 図 1 のポテンシャルに対するシュレーディンガー方程式を、束縛状態の場合に $|x| < a$、$x < -a$、$x > a$ の 3 領域に分けて解き、$x = \pm a$ と $x \to \pm\infty$ での $\phi(x)$ の境界条件を用いてエネルギー固有値 E が満たさなければならない条件が $\alpha = \sqrt{2mE}/\hbar$ と $\beta = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ を使って次のように表されることを示しなさい。

$$\beta = \alpha \tan \alpha a$$

1-4. V_0 がある条件を満たすとき、偶関数の固有関数をもつエネルギー固有状態の数は 1 つに限られる。$\xi = \alpha a$、$\eta = \beta a$ と置いて **1-3.** の結果を使い、この条件を答えなさい。

1-5. 井戸が浅く、$0 < V_0 \ll \hbar^2/ma^2$ であるとき、束縛状態のエネルギー固有値 E は無次元パラメータ $\lambda = V_0\, ma^2/\hbar^2$ について、以下のようなべき級数の形で求めることが出来る。

$$E = \frac{\hbar^2}{ma^2} \left(\lambda\, C_1 + \lambda^2 C_2 + \lambda^3 C_3 + \cdots\right)$$

C_n は無次元の定数である。C_1 と C_2 を求めなさい。

問 2 ２原子分子を剛体として扱い、電場中のエネルギー準位を考察しよう。分子が電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ をもっているとき、一様電場 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 中の分子の回転運動に関するハミルトニアンは、次のように書ける。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \tag{1}$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2I}\boldsymbol{L}^2, \qquad \mathcal{H}_1 = -p\mathcal{E}\cos\theta \tag{2}$$

ただし、電場は z 軸正方向を向いているものとし、θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ は電場方向と電気双極子ベクトルの方向がなす角度である。また、簡単のため、分子は電気双極子ベクトルに垂直な軸のまわりの回転のみを行うものとしており、$\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$ は角運動量演算子、I は慣性モーメントである。以下の問いに答えなさい。

2-1. 角運動量演算子の交換関係は、

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z,\ [L_y, L_z] = i\hbar L_x,\ [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

である。これを使って、$\boldsymbol{L}^2$ と L_z、および $\mathcal{H}_0$ が同時対角化できることを示しなさい。

$\boldsymbol{L}^2$ と L_z の固有値はそれぞれ $\ell(\ell+1)\hbar^2$、$m\hbar$ である。ただし、$\ell = 0, 1, 2, \cdots$、かつ、$m = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm\ell$ であり、それらの同時固有ベクトルを $|\ell, m\rangle$ と書くことにする。

2-2. $\langle \ell', m'|\mathcal{H}_1|\ell, m\rangle \neq 0$ が成り立つために、m と m' が満たさなければならない必要条件を理由とともに答えなさい。

また、$\langle \ell', m'|\mathcal{H}_1|\ell, m\rangle \neq 0$ が成り立つために ℓ と ℓ' が満たさなければならない条件は、$\ell' = \ell \pm 1$ であることが示せる。以下の **2-4.** ではこの結果を使ってよい。

2-3. 一般に、ハミルトニアンが λ を微小な定数として $H = H_0 + \lambda H_1$ という形をしている場合に、H の固有値を摂動論を用いて求めよう。 非摂動ハミルトニアン H_0 の規格化された固有状態が $|\phi_k^{(0)}\rangle$ であり、エネルギー固有値が $E_k^{(0)}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ であるとき、H の固有状態と固有値をそれぞれ

$$|\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda|\phi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2|\phi_n^{(2)}\rangle + \cdots,$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \cdots$$

のように λ のべき級数に展開する。$E_n^{(1)}$、$|\phi_n^{(1)}\rangle$ を $E_k^{(0)}$ と $|\phi_k^{(0)}\rangle$ によって具体的に表しなさい。 ただし、非摂動の固有値 $E_k^{(0)}$ に縮退はないものとする。また、$|\phi_n\rangle$ は λ の 1 次までの精度で規格化しなさい。

2-4. (1) 式のハミルトニアン $\mathcal{H}$ に対し、m の値が一定の状態 $\{|\ell, m\rangle;\ \ell = |m|, |m|+1, |m|+2, \cdots\}$ のみからなる部分空間 V_m を考え、この部分空間内で、$\mathcal{H}_0$ の非摂動固有状態

$|\phi^{(0)}\rangle = |\ell, m\rangle$ からの $\mathcal{H}_1$ による摂動を計算しよう。**2-3.** の結果を使って、2 次摂動までの精度で $\mathcal{H}$ の固有値 $E_{\ell m} = E^{(0)}_{\ell m} + E^{(1)}_{\ell m} + E^{(2)}_{\ell m}$ を計算しなさい。

ただし、**2-3.** のエネルギー固有値の 2 次の摂動は次式で与えられることを使ってよい。

$$E^{(2)}_n = \langle \phi^{(0)}_n | H_1 | \phi^{(1)}_n \rangle$$

また、必要なら以下の結果も使ってよい。

$$\langle \ell, m | \cos\theta | \ell - 1, m\rangle = \langle \ell - 1, m | \cos\theta | \ell, m\rangle = \left(\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}\right)^{1/2}$$

問題 IV

問 1 図 1 のような、2 つの定積過程と 2 つの等圧過程からなる、n モルの理想気体の準静的熱サイクルを考える。以下の問いに答えよ。

1-1. これは熱機関（例：エンジン）、冷凍機（例：ヒートポンプ）のいずれか。答えの理由も簡潔に述べよ。

1-2. 図 1 の (1)〜(4) の矢印の過程が、それぞれ次のどちらに属するか答えよ。
a) 熱量が流入する過程
b) 熱量が流出する過程

1-3. (1)〜(4) のそれぞれの過程において、理想気体の得る熱量 Q_i $(i = 1〜4)$ の値を、定積モル比熱 C_V、 モル数 n、気体定数 R、 圧力 P_1、P_2、体積 V_1、V_2 を用いて表せ。

1-4. この熱サイクルの効率 η を **1-3.** で与えた物理量を用いて表せ。

1-5. 理想気体が 2 原子分子からなり、$P_2 = 2P_1$、$V_2 = 2V_1$ の場合を考える。このとき、熱サイクルの効率は、$T_1 = \dfrac{P_1V_1}{nR}$ と $T_2 = \dfrac{P_2V_2}{nR}$ の間で作動する理論上のカルノーサイクルの効率と比べて何 % になるか求めなさい。

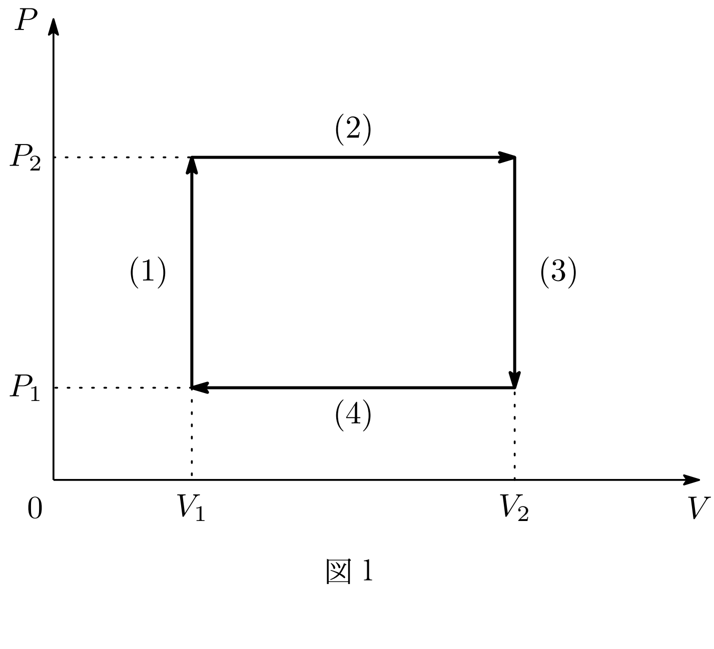


図 1

問 2 一つの原子が 2 つの離散的エネルギー準位のみをとる「2 準位系」を考える。基底状態のエネルギーを $E=0$、励起状態のエネルギーを $E=\Delta$ とする。また、基底状態は縮重度 g_1、励起状態は縮重度 g_2 とする。このとき、ボルツマン定数を k_B とし、以下の問いに答えよ。

2-1. 温度 T における、系の自由エネルギーを求めよ。但し、ボルツマン統計を用い、$\beta=\frac{1}{k_BT}$ とおくこと。

2-2. 温度 T における、系のエントロピーを求め、$T\to\infty$ での値を求めよ。

2-3. 温度 T における、系の比熱を求めよ。

2-4. **2-3.** の比熱の温度依存性には、ショットキー異常と呼ばれる特徴的な振る舞いが現れる。縦軸を比熱、横軸を $\frac{k_BT}{\Delta}$ とした場合の比熱の温度依存性のグラフの概形を描きなさい。