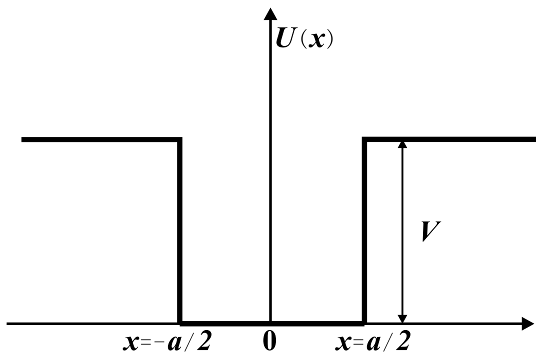
問題 III

問 1 図のような障壁の高さが V で、幅が a であるような 1 次元量子井戸 $U(x)$ に閉じ込められた質量 m の粒子を考える。



1-1. 井戸の中と障壁の中で、粒子が従うシュレーディンガー方程式を書きなさい。

1-2. 次に粒子のエネルギー E が $E < V$ である場合を考え、**1-1** で得たシュレーディンガー方程式を解く事を考える。

(a) 井戸内と障壁内の波動関数を求めなさい。但し波動関数の規格化はしなくてよい。

(b) (a) で得た波動関数は $x = \pm a/2$ で滑らかにつながらなくてはいけない。その結果、次式のいずれかが成立することを示しなさい。

$$k \tan\left(\frac{ka}{2}\right) = \beta$$
$$k \cot\left(\frac{ka}{2}\right) = -\beta$$

但し $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$、$\beta = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$ である。

1-3. 最後に 1 次元量子井戸での粒子のエネルギー固有値と束縛の性質について考える。

(a) **1-2** の (b) で得られた式からエネルギー固有値を求めたい。グラフを描いて固有値を求める手順を示しなさい。

(b) (a) のグラフから、図のような 1 次元量子井戸では、それが如何に浅い井戸であっても、必ず一つ以上の束縛状態が存在することを示しなさい。

問 2 質量が m で固有振動数が ω である１次元調和振動子について考える。

2-1. １次元調和振動子のハミルトニアンは位置演算子 $\hat{q}$ とその共役運動量演算子 $\hat{p}$ を使って次のように書ける。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{q}^2$$

今、消滅演算子 $\hat{a}$、生成演算子 $\hat{a}^+$、数演算子 $\hat{n}$ を以下のように定義する時、

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\hat{q} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right) \\
\hat{a}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\hat{q} - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right) \\
\hat{n} &= \hat{a}^+\hat{a}
\end{aligned}$$

つぎの 4 つの関係を示しなさい。ここで $[\cdots,\cdots]$ は交換子を表す。

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}, \hat{a}^+\right] &= 1, \qquad [\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}, \\
\left[\hat{n}, \hat{a}^+\right] &= \hat{a}^+, \qquad \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

2-2. **2-1** で定義した消滅演算子 $\hat{a}$ の固有ベクトル $|\xi >$ ($\hat{a}|\xi >= \xi|\xi >$) のことをコヒーレント状態と呼ぶ。但しこの固有値 ξ は複素数であり、その共役複素数を ξ^* と表す。

(a) このコヒーレント状態における運動量演算子 $\hat{p}$ と位置演算子 $\hat{q}$ の期待値を求めなさい。その際にコヒーレント状態は規格化されているものとする。

(b) 次に、このコヒーレント状態において、以下のように定義される位置と運動量の揺らぎを求め、その積が $\dfrac{\hbar}{2}$ になることを示しなさい。

$$\begin{aligned}
\Delta q &= \sqrt{<\xi|\hat{q}^2|\xi> - <\xi|\hat{q}|\xi>^2} \\
\Delta p &= \sqrt{<\xi|\hat{p}^2|\xi> - <\xi|\hat{p}|\xi>^2}
\end{aligned}$$

2-3. **2-2** で考えたコヒーレント状態は消滅演算子 $\hat{a}$、生成演算子 $\hat{a}^+$ そして複素数 ξ を使って次のように書くことが出来ることが知られている。但し基底状態 $|0>$ は $\hat{a}|0>= 0$ を満たす。

$$|\xi >= \exp\left(\frac{-|\xi|^2}{2}\right)\exp\left(\xi\hat{a}^+\right)\exp\left(-\xi^*\hat{a}\right)|0>$$

(a) この $|\xi>$ が以下のように書ける事を示しなさい。

$$|\xi>=\exp\left(\frac{-|\xi|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{\sqrt{n!}}|n>$$

ここで $|n>=\dfrac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{+})^n|0>$ である。

(b) (a) のように表現したコヒーレント状態 $|\xi>$ が確かに消滅演算子の固有ベクトルでその固有値が ξ である事を示しなさい。