

問題 II

問 1 以下の設問に答えよ。

1-1. 図 1 のように、半径 a 、 b ($a < b$) の同心導体球殻の間に、誘電率 ϵ の誘電体をつめた同心球コンデンサーを考える。いま、内殻に電荷 $+Q$ 、外殻に電荷 $-Q$ を与え、外殻が接地されている場合を考える。同心球の中心からの距離を r とする。

(a) $r < a$ 、 $a \leq r \leq b$ 、 $b < r$ の領域における電場と電位を求め、それぞれをグラフに図示せよ。

(b) この同心球コンデンサーの静電容量 C と、蓄えられた電氣的エネルギー U を求めよ。

1-2. 図 2 のように、真空中において z 軸を中心として半径 a の円形の導線に電流 I が流れている。円の中心 O からの距離 z_0 だけ離れた z 軸上の点 P における磁束密度の大きさは $B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z_0^2)^{3/2}}$ となることを示せ。ただし、 μ_0 は真空中の透磁率である。必要があれば、導線に電流が流れているとき、導線上の微小な電流素片 $I dl$ から位置ベクトル r だけ離れた点に生じる磁束密度は $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times r}{r^3}$ であること（ビオ・サバールの法則）を用いてよい。

1-3. 半径 R の球殻上に電荷 Q が一様に分布しており、球殻のまわりは真空である。この球殻が、球の中心を通る軸のまわりに角速度 ω で回転しているとき、球殻の中心に生じる磁束密度の大きさを求めよ。ただし、電荷の分布は回転により変わらないものとする。必要があれば、1-2 の結果を利用してよい。

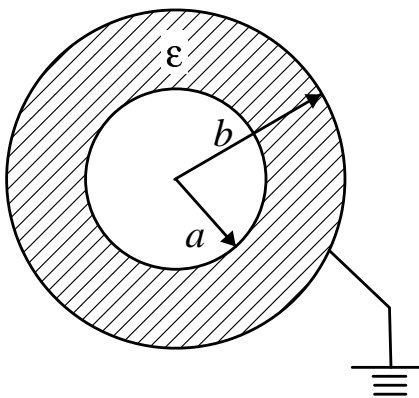


図 1

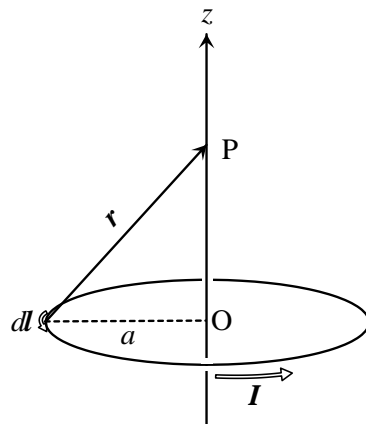


図 2

問2 物質の電気伝導は、動くことのできる荷電粒子が担っている。ここでは荷電粒子の運動と電気伝導およびホール効果の関係について考える。

まず、導体における電荷 q をもつ荷電粒子の運動を考える。電場 E があるときの荷電粒子の運動方程式は、速度 v に比例した抵抗を取り入れると、 $m \frac{dv}{dt} = qE - \frac{mv}{\tau}$ となる。ここで、 m は荷電粒子の質量、 τ は緩和時間である。導体には単位体積あたり n 個の荷電粒子があるとする。電流密度 j は $j = \sigma E$ の関係にあり、比例係数 σ を電気伝導度と呼ぶ。

2-1. 定常状態における荷電粒子の速度 v を求めよ。

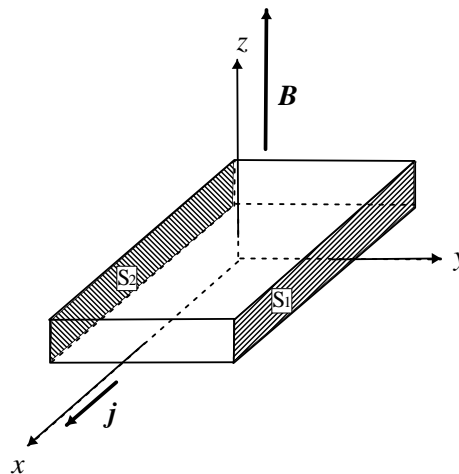
2-2. 電気伝導度 σ を n 、 m 、 q 、 τ を用いて表せ。

つぎに、磁場をかけた場合の荷電粒子の運動を考える。直方体の導体に対して図のように座標軸をとる。 x 軸の正の方向に電流を流し、 z 軸の正の方向に一様な磁束密度 B の磁場をかけた場合を考える。 x 方向に運動する荷電粒子はローレンツ力により y 方向に曲げられる。その結果、 y 軸に垂直な表面 S_1 と S_2 に電荷がたまり、 y 軸方向に電場（ホール電場） $E_H = (0, E_H, 0)$ が生じる。定常状態では、荷電粒子が受けるローレンツ力をホール電場 E_H から受ける力がちょうど打ち消し、荷電粒子は x 方向に直進し、電流密度 j の電流が流れる。

2-3. 荷電粒子の電荷 q の符号が正および負の場合について、 S_1 と S_2 にたまる電荷の符号を述べよ。

2-4. ホール電場 E_H を n 、 j 、 q 、 B を用いて表せ。ただし、 $j = (j, 0, 0)$ 、 $B = (0, 0, B)$ である。

2-5. 電気伝導度 σ とホール定数 $R_H = \frac{E_H}{jB}$ の測定より、導体のどのようなパラメータが決定できるかを述べよ。



問3 真空中を伝播する平面電磁波と、導体内に入射した電磁波について考える。

まず、真空中を z 軸の正の方向へ伝わる直線偏光した平面電磁波について考える。電磁波の電場を $(E_x, 0, 0)$ とすると、波数を k_0 、角振動数 ω とし $E_x(z, t) = Ae^{i(k_0z - \omega t)}$ と表される。このとき、次の問いに答えよ。ただし、真空の透磁率を μ_0 、誘電率を ϵ_0 とする。

- 3-1. マクスウェル方程式に基づき、 k_0 、 ω 、 ϵ_0 、 μ_0 の間に成り立つ関係式を求めよ。
- 3-2. 磁束密度 B を E_x 、 ϵ_0 、 μ_0 を用いて表わせ。
- 3-3. 電場のエネルギー密度 $u_e(z, t)$ と磁場のエネルギー密度 $u_m(z, t)$ の比を求めよ。

つぎに、この平面電磁波が $z \geq 0$ の半無限空間にある伝導度 σ 、透磁率 μ 、誘電率 ϵ をもつ導体に垂直に入射した場合の導体内部の電磁波について考える。

- 3-4. 電場に対する方程式が

$$\frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} = 0$$

であることを示せ。

- 3-5. $E_x(z, t) = Te^{i(kz - \omega t)}$ において $k^2 = \epsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega$ であることを示し、 $\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon}$ のとき、電場の振幅が $1/e$ となる導体表面からの深さ ℓ を求めよ。

補足：

マクスウェル方程式と媒質の電磁氣的応答

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

ここで ρ は電荷密度、 \mathbf{j} は電流密度である。