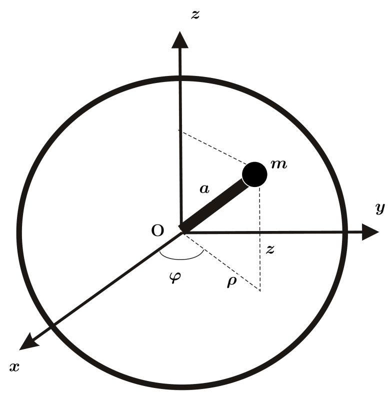
問題 I

問 1 重さを無視できる長さ a の棒の一端に質量 m のおもりをつけ、棒の他端を原点 O に固定して、おもりが鉛直面内に限らず、半径 a の球面上を自由に運動できるようにした振り子を考える。z 軸が鉛直上方を向くようにし、おもりの位置を円柱座標 (ρ, φ, z) を用いて表すことにする。おもりが球面上に拘束されているので座標の間には $\rho^2 + z^2 = a^2$ という関係があることに注意して、次の設問に答えなさい。重力定数は g とする。



1-1. 独立変数を z、φ に選び、関係式 $\rho = \sqrt{a^2 - z^2}$ に注意して ρ を消去し、変数 z、φ、$\dot{z}$、$\dot{\varphi}$ を使ってこの系のラグランジアン L を表しなさい。$\dot{z}$、$\dot{\varphi}$ などのドットは時間微分を表す。重力のポテンシャルの基準点は $z = 0$ にとること。

1-2. z と φ についてのオイラー・ラグランジュの方程式を求めなさい。

1-3. φ に共役な運動量 p_φ を求め、これが保存量であることを示しなさい。

1-4. 高さ $z = 0$ の位置から水平な方向におもりに初速 v_0 を与えた。その後のおもりの高さ z の最小値 z_1 と最大値 z_2 を求めなさい。

1-5. p_φ が 0 でなければ、おもりはある高さで水平な等速円運動をすることができる。このおもりが角速度 ω_0 で水平な等速円運動をしているときの z 座標 z_0 と p_φ の値 p_0 を求めなさい。

1-6. 小問 **1-5** の円運動が安定かどうかを調べるため、p_φ の値を p_0 から変えないようにしておもりの z 座標を少しだけずらした。$z = z_0 + \zeta$ とおいて、オイラー・ラグランジュの方程式を ζ の 1 次までの精度で評価することにより円運動が安定であることを示し、そのまわりの微小振動の周期 T を求めなさい。

問 2 長さ L の弾性的な糸が x 軸上に両端を固定して置かれ、速度に比例した抵抗を受けながら x 軸と垂直な方向に微小な運動をしている。このとき、糸の変位 $g(x,t)$ は $0 \leq x \leq L$ で次の方程式を満たす。

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2\gamma\,\frac{\partial g}{\partial t} \tag{1}$$

ただし、c、γ は $\gamma < \dfrac{\pi}{cL}$ なる正の定数である。

2-1. 変数分離法を用いて方程式 (1) の一般解を求めなさい。

この系に更に外から周期的な強制力が加わり、糸の変位の方程式がつぎのようになった。

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2\gamma\,\frac{\partial g}{\partial t} + F(x)\,\cos\omega t \tag{2}$$

2-2. フーリエ正弦級数展開の方法を用い、$F(x)$ の正弦フーリエ係数

$$F_n \equiv \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\,\sin\frac{n\pi}{L}x\;dx \tag{3}$$

を使って、十分時間が経った後の方程式 (2) の定常的な解 $g(x,t)$ を求めなさい。

2-3. f を定数として強制力が $F(x) = f\sin\dfrac{2\pi}{L}x$ のとき、十分に時間が経った後の糸の振動の振幅を最大にする強制力の角振動数 ω の値を求めなさい。