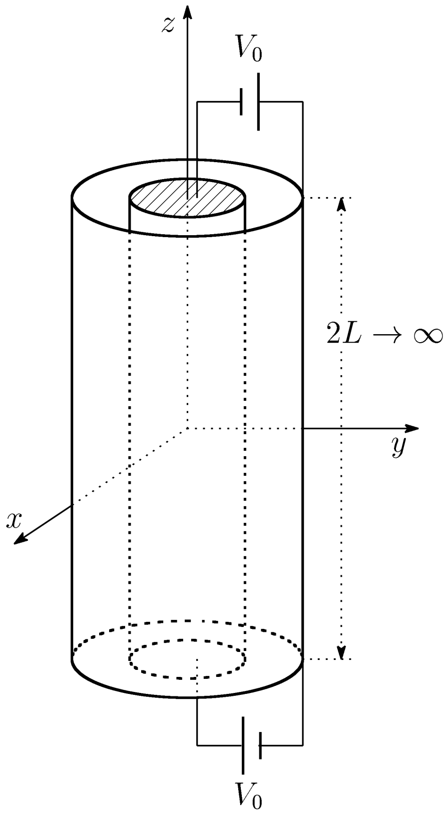
問題Ⅲ

問 1 右図のように半径 a の内部導体（中空ではない）と半径 b の円筒形の外部導体からなる長さ $2L$（$>> a, b$）の同軸ケーブルがある。いずれの導体も単位長さあたり λ の電気抵抗を持つものとし、簡単のため外部導体の厚さは無視できるものとする。同軸ケーブルの両端に図のように V_0 の電圧をかけることにより、内部導体には大きさ J の電流が一様に $+z$ 方向に流れ、外部導体には大きさ J の電流が一様に $-z$ 方向に流れている。

　このとき同軸ケーブル内部に生じる電場と磁場は、$|z| << L$ では両端の効果が無視できるので、同軸ケーブルが無限に長いと近似して求めることができる。以下では $\frac{V_0}{L}$ は一定に保ったまま $L \to \infty$ とし、一定の電流 J が流れる無限に長い同軸ケーブルが与えられたものとしてその内部の電場と磁場に関する以下の設問に答えよ。なお、導体以外の部分は真空になっているとし、真空の誘電率を ϵ_0 とする。



z 軸（中心軸) から垂直距離 r の点における磁場は、z 軸から距離 r の円の接線成分しか持たない。

1-1. アンペールの法則を用いて z 軸から距離 r（$< b$）の点における磁場の大きさを求めよ。

1-2. z 軸から距離 r の点における磁場が、実際に z 軸から距離 r の円の接線成分しか持たないことを示せ。

次に同軸ケーブル内部の電場について考える。定常的な系では電場を求めるのに静電ポテンシャル ϕ を用いるのが便利である。以下では円筒座標 (r, θ, z) を用いて静電ポテンシャル $\phi(r, \theta, z)$ を求める。但し、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ である。

1-3. それぞれの導体において距離 l の間に生じる電圧降下を考え、電位差 $\phi(a, \theta, l) - \phi(a, \theta, 0)$ 及び $\phi(b, \theta, l) - \phi(b, \theta, 0)$ を求めよ。

1-4. 電荷が存在しない領域では静電ポテンシャル ϕ はラプラス方程式 $\triangle\phi = 0$ を満たす。円筒座標を用いると、ラプラス方程式が

$$\triangle\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

となることを示せ。

1-5. 円筒座標で表示した電場 $\vec{E}$ の各成分 (E_r, E_θ, E_z) を ϕ を用いて表せ。

1-6. (1) のラプラス方程式に対して変数分離型の解 $\phi(r, \theta, z) = A(r)B(\theta)C(z)$ を考える。この系に生じる電場の性質を考え、$B(\theta)$ および $C(z)$ が満たすべき条件を与えよ。なお、同軸ケーブルは無限の長さを持つとしていることに注意せよ。

1-7. 同軸ケーブル内（$r < b$）の静電ポテンシャル ϕ を求めよ。但し、**1-3** の結果に加え、$z = 0$ では電場の動径成分が 0 になる $(E_r(r, \theta, z = 0) = 0)$ ことを用いてよい。（両端にそれぞれ V_0 の電圧を与える場合には、両端から等距離にある xy 平面が等電位面となることによる。）

問 2　誘電率 ϵ_1、透磁率 μ_1 の一様な物質 1 から誘電率 ϵ_2、透磁率 μ_2 の一様な物質 2 に電磁波が入射する。二つの物質の境界面は平面であるとして、境界面を xy 平面に取る。このとき、以下の設問に答えよ。

2-1. マクスウェル方程式に基づき、二つの物質の境界面では、電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ の境界面に平行な成分 E_t、H_t が連続であること、および、電束密度 $\boldsymbol{D}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の境界面に垂直な成分 D_n、B_n が連続となることを示せ。ただし、境界面には電荷や電流は存在しない。

2-2. 入射する電磁波の波数ベクトルを $\boldsymbol{k}$、角振動数を ω とし、入射電磁波の電場が $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ であるとき、入射電磁波の磁束密度が $\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0}{\omega}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ となることを示せ。

2-3. マクスウェル方程式より $\boldsymbol{k}$ と ω の間の関係式を求め、物質 1 における光の速さ（位相速度）c_1 を求めよ。

2-4. 直線偏光した電磁波が境界面に垂直に入射する場合を考える。電場の振動方向を x 軸方向に選ぶと、入射電磁波の電場は $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}$、磁場は $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}$ と表される。但し、$\boldsymbol{E}_0 = (E_0, 0, 0)$、$\boldsymbol{H}_0 = (0, \frac{k}{\mu_1\omega}E_0, 0)$ は定数のベクトルである。このとき境界面で反射された電磁波の電場および磁場を求めよ。

2-5. 入射エネルギーに対して反射されるエネルギーの比率を反射率と定義する。**2-4** のように境界面に垂直に入射する電磁波の反射率を求めよ。なお、電磁波が単位時間、単位面積当たりに運ぶ平均のエネルギーはポインティングベクトルの時間平均

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*$$

で与えられる（$\boldsymbol{H}^*$ は $\boldsymbol{H}$ の複素共役を表す)。

補足：電荷密度 ρ、電流密度 $\boldsymbol{j}$ が存在するときのマクスウェル方程式

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{D} &= \rho, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} &= 0, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned}$$