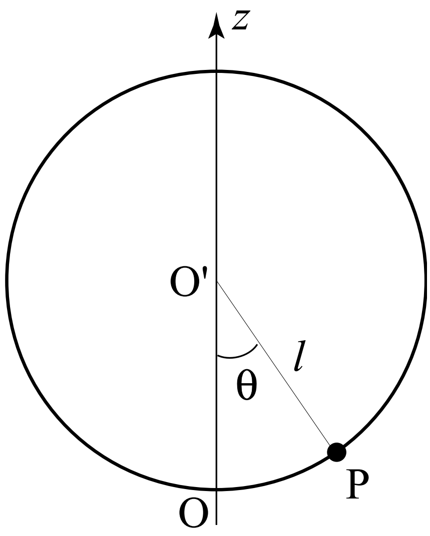
問題 I

問 1 図のように、質点 P が鉛直面に平行に置かれた滑らかな円輪に束縛されている。この質点の質量を m、円輪の半径を l とする。円輪の最下点を原点 O として鉛直上向きに z 軸を取り、円輪の中心 O' と質点 P を結ぶ直線が図のように z 軸となす角を θ とする。また、重力加速度を g とし、質点の位置エネルギーは最下点 O においてゼロとする。以下の設問に答えなさい。



1-1. この質点のラグランジアンを θ とその時間微分 $\dot{\theta}$ を用いて表せ。

1-2. ラグランジュの運動方程式を求めよ。

次に、この円輪を z 軸を回転軸として一定の角速度 ω で回転させる。

1-3. このときのラグランジアンを θ と $\dot{\theta}$ を用いて表せ。

1-4. 円輪の回転速度が小さいとき、質点は最下点付近で微小振動をすることが可能である。このときの角速度 ω の条件を求めよ。

1-5. 角速度 ω がある値のとき、質点は $\theta = 45^\circ$ の位置に留まり続けることができる。この ω の値を求めよ。

問 2　1 次元空間（$-\infty < x < \infty$）における粒子の拡散について考える。時刻 t、位置 x における粒子密度を $\rho(x,t)$ とする。拡散係数を D（>0）とすると、時刻 t に位置 x を単位時間に通過する粒子数 $j(x,t)$ は、$j(x,t) = -D\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x}$ で与えられる。以下の設問に答えなさい。ただし、必要であれば、i を虚数単位として次の数式が成立することを用いて良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x+ib)^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (b\text{ は実定数}), \qquad \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} dk$$

2-1. 微小領域 $[x, x+\Delta x]$ における粒子数の時間変化に着目して、粒子密度 $\rho(x,t)$ に関して次の方程式が成立することを示せ。

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}$$

2-2. $\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\mathrm{e}^{-Dk^2t+ikx} dk$ が上記の方程式の解であることを示せ。ただし、$A(k)$ は k の関数で、x と t には依存しない。

2-3. 時刻 $t=0$ に N 個の粒子が原点 $x=0$ に局在している、すなわち、$\rho(x,0) = N\delta(x)$ であるとする。$A(k)$ を決定し、時刻 $t\,(>0)$、位置 x での粒子密度 $\rho(x,t)$ を求めよ。

2-4. **2-3** の結果を基に、粒子密度の空間分布が時間の経過と共にどのように変化するかを定性的に説明せよ。