# 問題 IV

**必要であれば補足にある値、公式を用い以下の問に答えよ。**

**問 1** 以下の問に答えよ。

**1-1.** ある金属に光をあてて光電効果による電子を放出させるためには、光の波長が 6280 Å 以下でなければならないという。この金属に波長が 1970 Å の光をあてたときに出て来る電子の最大エネルギーを有効数字３桁で求めよ。

**1-2.** ３次元の球対称ポテンシャル $V(r)$ の中を質量 $m$ の粒子が運動している。この粒子の定常状態の波動関数が球面調和関数 $Y_{lm}$ を用いて次のように表されるとき、動径波動関数 $u_l(r)$ の満たすべき方程式を書け。(エネルギー固有値は $E$ とせよ。)

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi).$$

**1-3.** １次元デルタ関数型ポテンシャル $V(x) = -C\delta(x)$ $(C > 0)$ により質量 $m$ の粒子が束縛されている。この束縛状態のエネルギーを求めよ。

(ヒント: シュレディンガー方程式を原点 $(x = 0)$ 近辺で積分すると、波動関数自体は連続であるが、波動関数の１階微分には有限の「とび」が現れることが分かる。)

**補足**
- 定数: $\hbar c = 1.97\ \mathrm{keV} \cdot \text{Å}$.
- ３次元ラプラシアンの球座標表示：

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{r^2} \quad \left(\hat{\boldsymbol{L}} = \frac{1}{\hbar}\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}\right).$$

**問 2** ハミルトニアンが次のように与えられる 1 次元調和振動子について、以下の問に答えよ。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} \ . \tag{1}$$

**2-1.** 不確定性関係 $(\Delta x \Delta p \geq \hbar/2)$ を用いて、エネルギー期待値の下限 $E_0$ を求めよ。

**2-2.** 演算子 $\hat{a}$ が次のように与えられている。

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\alpha\hat{x} + \frac{i}{\alpha}\hat{p}\right) \quad \left(\alpha = \sqrt{m\omega}\right) \ .$$

次の 2 つの関係式を示せ。

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \ , \quad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1 \ . \tag{2}$$

**2-3.** エネルギー固有値が $E$ の固有状態 $|E\rangle$ があるとする。これに $\hat{a}^\dagger$、$\hat{a}$ を演算した状態

$$|E_+\rangle = \hat{a}^\dagger|E\rangle \ , \quad |E_-\rangle = \hat{a}|E\rangle \ ,$$

について、以下の関係式を示せ。ただし、式 (2) を用いて良い。

$$\hat{H}\,|E_\pm\rangle = (E \pm \hbar\omega)|E_\pm\rangle \ .$$

**2-4.** 式 (1) のハミルトニアンに次のポテンシャル $V_1(x)$ がつけ加わった場合の基底状態のエネルギー変化を一次の摂動で求めよ $(C_1, \omega_1$ は定数である)。

$$V_1(x) = C_1 \exp\left(-\frac{m\omega_1 x^2}{\hbar}\right) \ .$$

(ヒント: 問題 **2-3** より基底状態 $|0\rangle$ では $\hat{a}|0\rangle = 0$ となることが示せる。これから座標表示の基底状態波動関数を求めて摂動計算を行なえばよい。)