問題 Ⅲ

問 1 図１のような内部導体の直径が $2a$ [m] 外部導体の内径が $2b$ [m] の同軸ケーブルがある。内部導体と外部導体の間は誘電体で満たされておりその誘電率、透磁率を等方的として ε [F/m]、μ [H/m] とする。また内部導体と外部導体の抵抗はないものとする。以下の問題でベクトル量は太文字、例えば $\mathbf{B}$ 、スカラー量は斜体文字、例えば q と表す。

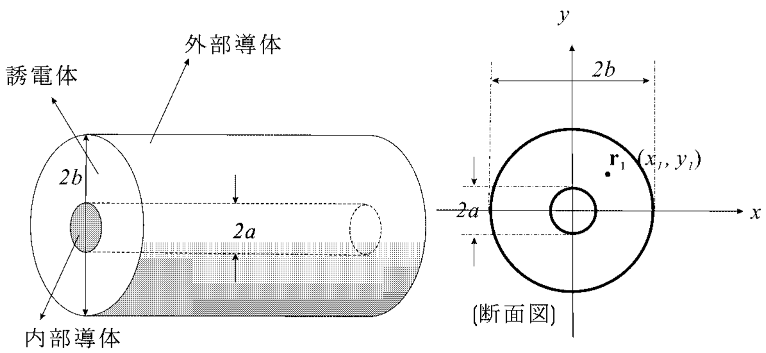

図 1:

1-1. 静電荷が作り出す静電場について考える。このケーブルに長さ 1 [m] あたり、内部導体に $+q$ [C]、外部導体に-q [C] の電荷を充電する。図１の点 $\mathbf{r_1}$ における電場の方向はどの方向かを図示し、ガウスの法則を用いて大きさが、

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r_1})| = \frac{q}{2\pi\varepsilon r_1}$$

また外部導体と内部導体との電位差 $\Delta\phi$ [V] が

$$\Delta\phi = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

で与えられることを示せ。ここで $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ とする。

問 2 実電荷のない空間を伝播する電磁波について考える。電磁波の振動数を ω、進行方向を z 軸とし電場、磁場が z 軸と直交する場合に限定する。

2-1. 誘電率 ε、透磁率 μ の誘電体内を伝播する電磁波を

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_0(x,y)\,e^{i(\omega t-\beta z)},\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(x,y)\,e^{i(\omega t-\beta z)},\ \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

とおくことにする。z 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{k}$ とし、Maxwell の方程式か

ら出発して

$$\mathbf{E}_0 = \zeta \mathbf{H}_0 \times \mathbf{k},\ \mathbf{H}_0 = -\frac{1}{\zeta}\mathbf{E}_0 \times \mathbf{k},\ \zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$$

が成り立つことを示せ。

問 3 同軸ケーブルで高周波信号 ($2\pi\big/\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \gg a, b$) を伝送することを考える。入射端 ($z$=0) で高周波電源により外部導体を基準に内部導体に $V_{AC}(t) = V_0 e^{i\omega t}$ で変化する電圧を加える（図２）。同軸ケーブルに加えられた高周波は同軸ケーブルの誘電体内を前問で定義した電磁波として伝播すると考える。対称性より電場は動径方向の成分しか持たないことに注意する。すなわち、電場と磁場の振幅は r のみの関数になると考えられる。

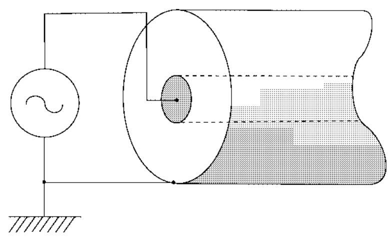

図 2:

3-1. 入射端から $z = z_0$ の位置における中心導体の電圧を $V(t) = V_1 e^{i\omega t}$ とし $z = z_0$ でのケーブルの断面を考える。同軸中心から半径 r_1（図１）の誘電体内の位置での電場の振幅は、同軸中心から外部導体に向かう方向を正にとると

$$E_1(r_1, t) = V(t)\Big/ r_1 \ln\frac{b}{a}$$

で与えられることを示せ。

3-2. 問 3-1 と同じ位置 $\mathbf{r_1}$ での磁場の方向をその正の方向がわかるように図示しその振幅 $H_1(\mathbf{r_1}, \mathbf{t})$ を $V(t),\ r_1,\ a,\ b,\ \varepsilon,\ \mu$ を用いて書き下せ。

3-3. $z = z_0$ の位置での中心導体中を z 軸方向に流れる高周波電流を $I(t) = I_1 e^{i\omega t}$ とした時、アンペールの法則よりケーブルを伝播する電流振幅と内部導体と外部導体に印加した電圧振幅の比 $V(t)/I(t)$ を $a,\ b,\ \varepsilon,\ \mu$ を用いて表せ。