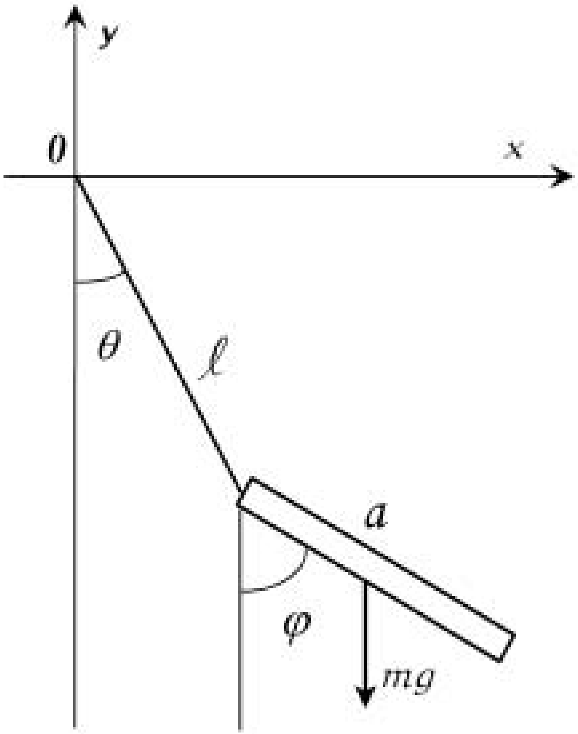
問題　I

問 1 質量を無視できる長さ ℓ の糸の上端を固定し、下端に質量 m の細く一様な長さ a の棒をつり、鉛直面内で振動させる。図のように糸と棒が鉛直軸となす角度をそれぞれ $\theta,\ \varphi$ とする。棒の重心のまわりの慣性モーメントは $I = \frac{1}{12}ma^2$ であり、重力加速度を g と書く。



1-1. 一般化座標 $\theta,\ \varphi$ およびその時間微分 $\dot{\theta},\ \dot{\varphi}$ を用いてこの系のラグランジアン L を求めよ。位置エネルギーの原点は $y=0$ とする。

1-2. 微小振動を考えることにする。 ラグランジアン L で $\theta,\ \varphi,\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}$ の 2 次の項までを残し、Euler-Lagrange 方程式を書き下せ。

1-3. 問 1-2 の方程式の解を

$$\theta(t) = A\ \cos(\omega t + \alpha), \qquad \varphi(t) = B\ \cos(\omega t + \alpha)$$

と仮定し $(A,\ B,\ \omega,\ \alpha$ は定数)、2 つの基準振動の振動数 $\omega = \omega_1,\ \omega_2$ $(\omega_1 > \omega_2)$ を求めよ。

1-4. 特に $a = 3\ell/2$ とする。このとき、問 1-3 の基準振動数 $\omega = \omega_1,\ \omega_2$ に対応する基準座標 Q_1 及び Q_2 を θ と φ で表し、さらにこれらの基準座標が表す振動の様子を図示せよ。基準座標の規格化はしなくてよい。

問 2 z 軸方向の一様な静磁場 B 中の電荷 q の運動で適当なゲージを選ぶと、$x-y$ 平面上の運動に関するハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}(p_x + \frac{1}{2}qB\ y)^2 + \frac{1}{2m}(p_y - \frac{1}{2}qB\ x)^2$$

となる。ここでは z 軸方向の運動は考えないものとする。

2-1. 正準方程式を書き下せ。

2-2. 問 2-1 の正準方程式の一般解を求め、電荷の運動が円運動であることを示せ。さらにその角振動数 ω を求めよ。

2-3. 積分

$$J \equiv \frac{1}{2\pi}\oint (p_x\ dx + p_y\ dy)$$

を計算し、エネルギー E と ω で表せ。ただし積分は運動の一周期にわたるものとする。

2-4. 次に B を時間変化させる。この場合にも上のハミルトニアン H が使えるが、電荷の運動は周期的ではなくなり エネルギー E や問 2-3 で求めた $J(E,\omega)$ は保存しなくなる。しかし B の変化が非常に緩やかなら、ある時刻 t から時間間隔 $T = 2\pi/\omega(t)$ の間の $B(t)$ の変化は小さく、B の値を時刻 t の値 $B(t)$ に固定した円軌道に沿って dJ/dt を一周期平均した

$$\left\langle \frac{dJ(E,\omega)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} dt\ \ \frac{dJ(E,\omega)}{dt}$$

によって、$\omega(t)$ に比べて速い時間変化をならした J の時間変化率を定義できる。B の変化が十分緩やかであるなら、dB/dt の 1 次まで残す近似でこの J の平均時間変化率が 0 となることを示せ。J のような量を断熱不変量と呼ぶ。

2-5. B を非常にゆっくりと強くしていくと円運動の半径が B と共にどの様に変化するかを示せ。