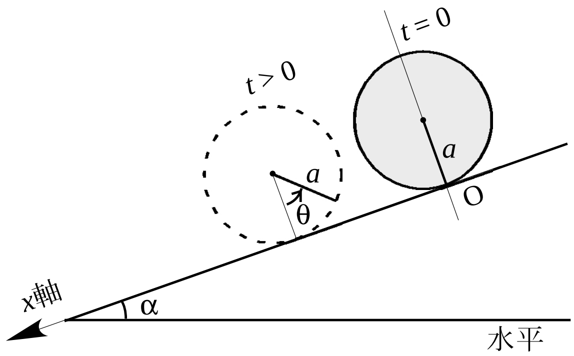
問題 I

問 1 右図のように水平から角度 α だけ傾いた斜面を半径 a で質量 M（密度は一様）の円柱が、鉛直下方に働く一様な重力の影響をうけて、その軸を水平にして斜面を滑らずに転がる場合を考える。



時刻 $t=0$ での円柱と斜面の接点を原点 O とし、斜面にそって下方に x 軸をとり、円柱の重心の x 座標を x_G、円柱の円柱軸まわりの回転角を θ（反時計回りを正とし、$t=0$ で $\theta=0$ とする）とする。また、重力加速度を g とし、円柱軸まわりの慣性モーメントは $(1/2)a^2M$ であるとする。

1-1. 一般化座標として x_G と θ を選び、これらの時間微分をそれぞれ $\dot{x}_G$ と $\dot{\theta}$ とした時、円柱の並進運動の運動エネルギー T_G、円柱の軸回りの回転運動の運動エネルギー T_R、そして円柱のポテンシャル・エネルギー U_G（$x_G=0$ で $U_G=0$ とする）を求めよ。

1-2. 滑らずに転がる条件から、$\dot{x}_G$ と $\dot{\theta}$ の間の関係を求めよ。この関係と **1-1** の結果から Lagrangian L を x_G と $\dot{x}_G$ だけを独立変数とする関数として記述せよ。

1-3. 時刻 $t=0$ で円柱が静止していた場合、Lagrange の方程式を解くことにより x_G の時間変化を求めよ。

問 2 Hamiltonian が $H(q,p)=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2q^2$ で与えられる一次元調和振動子について考える。ここで、q は座標、p は q に共役な運動量であり、また m と ω_0 はそれぞれ質量と固有角振動数である。

2-1. Hamilton の正準方程式を解くことにより、時間を t、振動子の振幅を A、初期位相を ϕ として q と p の時間変化を求めよ。また、この結果を用いて H の値が t に依らないことを示せ。

2-2. q を横軸に、p を縦軸に取った直交座標系を考えたときに、**2-1** で求めた結果を用いて点 (q,p) が時間 t とともにどのような軌跡を描くかを図示せよ。また軌跡で囲まれる面積 S を求めよ。ただし、長半径、短半径の長さがそれぞれ a、b の楕円の面積は πab となる。

2-3. 前期量子論によれば面積 S は Planck 定数 h の整数倍 (n 倍) しかとれないこと、つまり $S = nh$ が量子条件となっている。この条件を課すことにより、Hamiltonian H の値も、あるエネルギー量子 ϵ の n 倍しかとれないことが導出できる。導出過程を明記しながら、ϵ を $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ と ω_0 だけの関数として表せ。

問 3 減衰がある場合の一次元調和振動子を考える。時刻 $t < 0$ で静止していた振動子に対して、デルタ関数的な外力 $F_0\delta(t)$（F_0 は外力の強さを表す）が加わった場合の運動は

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x(t) = F_0\delta(t) \tag{1}$$

なる方程式で記述される。ここで m、$x(t)$、γ、ω_0 はぞれぞれ振動子の質量、座標、減衰定数（正の定数)、減衰がないときの固有角振動数である。この方程式の解 $x(t)$（$t > 0$）を求めよう。

3-1. Fourier 変換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega \tag{2}$$

を利用すると、$\omega_a^2 \equiv \omega_0^2 - \gamma^2$ が正の値となるとき、$\tilde{x}(\omega)$ は

$$\tilde{x}(\omega) = A\left(\frac{1}{\omega - B} - \frac{1}{\omega - C}\right) \tag{3}$$

なる形式に書ける。この式に現れる A、B、C をそれぞれ m、F_0、γ や ω_a を用いて表せ。

3-2. $\tilde{x}(\omega)$ を Fourier 変換して $x(t)$（$t > 0$）を求めよ。複素積分が必要な時は、積分経路をどのように取ったかを図示し、またそのように取った理由も明記せよ。