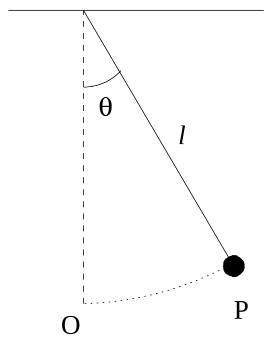
問題 I

1.　図のように、質量 m の質点 P を長さ l の伸び縮みしないひもの先端に結びつけた振り子が、重力下で鉛直面内で振動している。

　以下、重力加速度を g、質点 P が平衡点 O にあるときを位置エネルギーの原点に、鉛直線から測ったひもの傾き角を θ とする。



1-1 質点 P の運動エネルギー T とポテンシャル・エネルギー U を傾き角 θ を使って表せ。
1-2 ラグランジアン L を与え、質点 P の運動方程式を求めよ。
1-3 傾き角 θ を一般化座標とし、共役な一般化運動量を定めてラグランジアン L からハミルトニアン H を導け。
1-4 傾き角 θ が小さいとして振動の周期 T を求めよ。

2.　物理法則はしばしば変分原理を満足する。変分と云うのは関数 $y(x)$ の汎関数 $T[y]$ が極値となる $y(x)$ を探す方法である。典型的な例としてつぎの形の汎関数を考えてみよう。

$$T[y] = \int_A^B L(y(x), y'(x), x)dx \qquad (y'(x) = \frac{dy(x)}{dx})$$

但し、変分を行うとき両端は $\delta y(A) = \delta y(B) = 0$ と固定してある。

2-1 $T[y]$ の変分を取り $y(x)$ を決める方程式を求めよ。
2-2 $L(y, y', x)$ が x を陽に含んでいないときには、つぎの量

$$y' \frac{\partial L(y, y')}{\partial y'} - L(y, y')$$

は x によらない保存量であることを示せ。

3. 質量 m の質点 P がばね定数 k のばねに繋がれて x 方向に単振動している。この質点に更に $F\cos\omega t$ なる外力を加え、質点 P の運動の様子を調べる。この質点 P の平衡点 O からの変位を $x(t)$ とし、その運動方程式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0^2x(t)=C\cos\omega t$$

で与えられるものとする。但し、$\omega_0^2=k/m$ および $C=F/m$ とした。

3-1 外力がないとしたときの一般解 $x_H(t)$ を求めよ。

3-2 外力があるときの特解を $x_S(t)=A\cos\omega t$ の形に仮定して $x_S(t)$ を求めよ。

3-3 与えられた運動方程式の一般解は $x_H(t)$ と特解 $x_S(t)$ の和で与えられる。このとき、初期時刻 $t=0$ において質点 P が平衡点 O に静止していたとして時刻 t における解 $x(t)$ を求めよ。

3-4 外力の角振動数 ω を質点 P の固有角振動数 ω_0 に近づけていくと共振が起こる。この極限で前問の解 $x(t)$ の形を求めよ。