平成 13 年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 T-II

1. $f(x)$ を区間 $[-L, L]$ で定義された関数とし、次式のような Fourier 級数で表すことを考える。

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{infty} a_n \exp\left(i\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{1}$$

1-1 $S(x)$ が実数値関数となる条件を求めよ。

1-2 式 (1) の右辺で $|n|$ の小さい $2k+1$ 項の和を S_k とする。すなわち、

$$S_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} a_n \exp\left(i\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{2}$$

このとき、$f(x) - S_k(x)$ の区間 $[-L, L]$ での平均２乗誤差

$$M_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x) - S_k(x)|^2 \,\mathrm{d}x \tag{3}$$

が最も小さくなるように a_n を決めよ。

1-3 上で求めた a_n に対して

$$M_k \geq M_{k+1} \geq M_{k+2} \ldots \geq 0 \tag{4}$$

となることを示せ。$f(x)$ が区分的になめらかな関数の場合は、$\lim M_{n\to\infty} f(x) = 0$ となり、ほとんどいたるところで Fourier 級数 $S(x)$ は $f(x)$ に就職する。

1-4 関数 $f(x)$ が、区間 $(-\epsilon/2, \epsilon/2)$ で $f(x) = 1/\epsilon$、その外の区間 $([-L, -\epsilon/2]$ と $[\epsilon/2, L]$ で $f(x) = 0$ の値をとるとき、この関数の Fourier 級数を求めよ。

1-5 $\epsilon \to 0$ とした極限で、1-4 で求めた Fourier 級数はどのような形になるか求めよ。

2. １次元の熱伝導の問題への応用を考える。熱流束は温度勾配に比例し、空間座標を x とすると、$-\sigma\partial T/\partial x$ で与えられる。ここで、σは熱伝導係数で、以下では、定数とする。また、熱の発生あるいは吸収がある場合には、座標 x、時間 t における単位時間、単位体積あたりに発生する熱量を $q(x, t)$ で表す。このとき、温度を $T(x, t) = T_0 + u(x, t)(T_0$ は定数) とおくと、熱伝導の方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q \tag{5}$$

となる。ただし。物体の密度と比熱を１とした。

x の範囲を区間 $[-L, L]$ にとり、$x = L/2$ と $x = -L/2$ に、それぞれ、$q_0\delta(x - L/2)$ の熱の発生源と$-q_0\delta(x + L/2)$ の熱の吸収源がおかれていて、かつ、周期的な境界条件が満たされているとする。この場合、熱伝導の方程式 (5) は Fourier 級数を使って解くことができる。以下の問に答えよ。

2-1 上記の熱の発生源と吸収源からの寄与をあわせた熱源の分布関数

$$q(x) = q_0\delta(x - L/2) - q_0\delta(x + L/2) \tag{6}$$

を、1-5 の結果を使って、Fourier 級数で表せ。

2-2 熱源が式 (6) で与えられた熱伝導の方程式 (5) について、温度 u を Fourier 級数に展開、

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) \exp\left(i\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{7}$$

とおいて代入して、Fourier 係数 a_n $(n = 0, \pm1, \pm2 \pm 3, ...)$ に対する微分方程式を導け。

2-3 2-2 で求めた微分方程式を解いて、a_nの一般解を求めよ。

2-4 初期条件が

$$u(x,0) = 0 \tag{8}$$

で与えられた場合の $u(x,t)$ の解を、Fourier 級数で表せ。

2-5 2-4 で求めた Fourier 級数は $t \to \infty$ の極限で、どのような関数に近づくか求めよ。

3. 無限区間の関数 $f(x)$ の場合も、$f(x)$ が、区分的になめらかで、$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$ であれば、有限区間の場合の Fourier 級数を拡張して、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\exp(ikx)\mathrm{d}k \tag{9}$$

で表すことができる。この Fourier 変換を使って、温度を $T(x,t) = T_0 + u(x,t)(T_0$は定数) とした時の熱源のない熱伝導の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{10}$$

を解くことができる。初期条件を $u(x,0) = u_9\delta(x)$ とし、$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$ のとき、Fourier 変換して解を求め、Fourier 逆変換して、$u(x,t)$ を導け。