平成 12 年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 T-III

[1] z軸に平行にかけた大きさ Hの一様な磁場中に、独立の見なせる大きさ $S=\frac{1}{2}$のスピンが N個ある。ただし $N \gg 1$ とする。各スピンの z方向の磁気量子数が、$s_{1z}, s_{2z}, s_{3z}, \cdots, s_{Nz}$ の時、系の全エネルギーは

$$E(s_{1z}, s_{2z}, s_{3z}, \cdots, s_{Nz}) = -\sum_{i=1}^{N} g_0 \mu_B s_{iz} H$$

と与えられる。ここで、g_0は g因子で、μ_Bはボーアの磁気能率である。また以下では、ボルツマン定数として k_Bを用いる。

(1) 温度 Tで磁場 Hの時の磁化、

$$M(T,H) = \sum_{i=1}^{N} g_0 \mu_B \langle s_{iz} \rangle$$

を求めなさい。ここで、$\langle s_{iz} \rangle$ は s_{iz}の熱統計平均である。

(2) 低温極限、$k_B T/|g_0 \mu_B H| \to 0$、でのエントロピーを S_0とし、高温極限、$k_B T/|g_0 \mu_B H| \to +\infty$、でのエントロピーを S_∞ とする。S_0と S_∞を答えなさい。

(3) アップスピン ($s_z = \frac{1}{2}$) の数 $N_\uparrow$、とダウンスピン ($s_z = -\frac{1}{2}$) の数 $N_\downarrow$、との比、$N_\uparrow/N_\downarrow$を $k_B T/g_0 \mu_B |H| \to +\infty$ の高温極限について答えなさい。

つぎに、$g_0 \mu_B H/k_B T \ll 1$ の高温・低磁場領域に限定して考えよう。

(4) $g_0 \mu_B H/k_B T$の高次項を無視すると、磁化は、

$$M(T,H) = C\frac{H}{T} + \cdots$$

とキュリー則に従う。キュリー定数 Cを求めなさい。

(5) 設問 (4) で求めたキュリー定数 Cを使うとエネルギー Uは

$$U(T,H) = -C\frac{H^2}{T} + \cdots$$

と書けることを示し、また設問 (2) で求めた定数 S_∞も使うとエントロピー Sは

$$S(T,H) = S_\infty - C\frac{H^2}{2T^2} + \cdots$$

と書けることを示しなさい。

(6) 磁場 H一定の条件で温度 Tでの比熱 C_Hと、磁化 M一定の条件で温度 Tでの比熱 C_Mを求めなさい。

(7) 温度 T、磁場 Hの状態を考えよう。この状態で熱浴との接触を断ち断熱状態にする。磁場を微小量ΔHだけ増加させた時の、温度変化ΔTと磁化の変化ΔMを求めなさい。

[2] g因子がスピンごとに異なる場合は、全エネルギーは

$$E(s_{1z}, s_{2z}, s_{3z}, \cdots, s_{Nz}) = -\sum_{i=1}^{N} g_i \mu_B s_{iz} H$$

と与えられる。g因子の分布関数$\rho(g)$ を、g因子が $g \sim g + \Delta g$ の間にあるスピンの数が $N\rho(g)\Delta g$で与えられるように定義しよう。当然、総和則

$$\int_{-\infty}^{+infty} \mathrm{d}g \rho(g) = 1$$

を満足する。

(8) 分布関数$\rho(g)$ を用いて、磁化

$$M(T, H) = \sum_{i=1}^{N} g_i \mu_B \langle s_{iz} \rangle$$

を与える式を答えなさい。

(9) g因子の分布関数が、具体的に

$$\rho(g) = \begin{cases} \frac{1}{g_m}, & 0 \leq g \leq g_m \text{の場合} \\ 0, & g_m < g \text{の場合} \end{cases}$$

で与えられる場合を考えよう。$g_0 \mu_B H / k_B T \ll 1$ の高温・低磁場領域では、磁化は、

$$M(T, H) = C_1^* \frac{H}{T} + \cdots$$

とキュリー則に従い、エネルギーは、

$$U(T, H) = -C_2^* \frac{H^2}{T} + \cdots$$

と書け、エントロピーは

$$S(T, H) = S_\infty^* - C_3^* \frac{H^2}{2T^2} + \cdots$$

と書ける。 C_1^*, C_2^*, C_3^*と S_∞^*を求めなさい。