

問題 T-I

水素原子を考えよう。

- (1) 古典論では、陽子のまわりを回る電子は安定ではない。それはなぜか？
- (2) 陽子の重さは、電子に比べて十分重いため、陽子は電子に対して静止していると考えよう。陽子の重さは、電子の重さのおよそ何倍か？

電子の電荷を $-e$ 、その質量を m とする。量子論では、定常的な電子の波動方程式は、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}),$$

であり、軌道角運動量 $l = 0$ の上体の方程式は極座標で

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right] - \frac{e^2}{r}\right\}\psi(r) = E\psi(r)$$

と書かれる。

- (3) 簡単のため、スピンの自由度を省略すると、基底状態の規格化された波動関数は、 $\psi(\mathbf{r}) = be^{-r/a_0}$ の形で厳密に解くことができる。 a_0, b の値と、そのときのエネルギー E_R を m, \hbar, e であらわせ。
- (4) a_0, E_R のおよその値を、それぞれ [m]、[eV] 単位で答えよ。ただし、有効数字一桁でもよい。
- (5) この基底状態の波動関数において、電子と陽子の距離 r と r^2 の期待値を求め、これらを a_0 であらわせ。

つぎに、一様な磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, ($B > 0$) をかける。この磁場を与えるベクトルポテンシャルとして、 $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$ を考える。このとき、スピン $1/2$ を持つ電子の波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は 2 成分ベクトル (スピノル) $(\psi_1(\mathbf{r}), \psi_2(\mathbf{r}))$ であり、その満たす方程式はパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ を用いて、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{ie\hbar}{mc}\mathbf{A}\cdot\nabla + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 + \frac{e\hbar}{2mc}\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \frac{e^2}{r}\right]\begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_2(\mathbf{r})\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_2(\mathbf{r})\end{pmatrix},$$

と書かれる。

- (6) 軌道角運動量 $l = 0$ の状態においては、

$$\mathbf{A}\cdot\nabla\psi(\mathbf{r}) = 0,$$

となることを示せ。

- (7) 波動方程式の中には、 $\frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2$ の項があるが、磁場が弱いとしてこれを無視する。この近似のもとで、基底状態の波動関数とそのエネルギーを求めよ。
- (8) 問 (7) で無視した $\frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2$ の項による効果を考える。これによる基底状態のエネルギーへの補正を、摂動の 1 次で求めよ。