平成 11 年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 T-II

一様な物質が真空と平面で接している。平面に垂直な方向を z 軸にとり、原点を平面上にとる。真空から物質に向かう方向を正とする。有利 MKSA 単位径をとる。、また、x,y,z 方向の単位ベクトルをそれぞれ、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$. $\boldsymbol{e}_z$とする。
必要なら次の式を使いなさい：
$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{V}) - \delta\boldsymbol{V}$、ここで$\boldsymbol{V}$は任意のベクトル場、$\Delta$はラプラシアン；
$\cos(\theta+\phi)\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta+\phi)+\cos\phi\right)$

1. 真空の誘電率をϵ_0、透磁率をμ_0とすると、真空中の Maxwell 方程式は、

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{E} &= 0,\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B} &= \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} &= 0,\end{aligned}$$

   であたえられる。ここで、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$はそれぞれ電場、磁束密度である。

   (1) 真空中の電場と磁束密度がそれぞれ波動方程式を満足することを示せ。

   (2) 振動数ωをもち、真空中を z 軸の正の方向に進む、平面波の電磁場の電場と磁束密度を (1) の波動方程式から求め、複素表示で表しなさい (その実数部分がその物理量と約束する)。ただし、電場の偏りを x 方向とし、複素振幅を $E_0\boldsymbol{e}_x$としなさい。

2. 物質は電束密度$\boldsymbol{D}$に対し$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$で定義される誘電率$\epsilon$と、電流密度$\boldsymbol{J}$に対し$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$で定義される電気伝導度$\sigma$($\epsilon$と$\sigma$はともに実定数) で特徴づけられるとし、透磁率は$\mu_0$とする。

   (1) 場として電場と磁束密度をとり、物質中での Maxwell 方程式を示しなさい。

   (2) 電場と磁束密度のそれぞれが満たす方程式を書きなさい。

3. 問題１ (2) の電磁波が物質に接すると、一部は反射し、残りは物質中に進入する。物質中の電場は真空中と同じ偏りをもって、z 軸の正の方向に進む波動となる。物質の電気伝導度σが大きいとし、1 に対し$\frac{\omega\epsilon}{\sigma}$ を無視して、以下の問題に答えよ。

   (1) 物質中の電場と磁束密度を複素表示で求めよ。ただし、z=0 のときの電場の複素振幅を $E_1\boldsymbol{e}_x$とせよ。

   (2) 電場と磁束密度の位相差を書け。

4. 物質中に、中心軸が z 軸と平行で $z = z_1$と $z = z_2$の平面に単位面積の底面をもつ円柱領域を考える。$z_2 > z_1$とする。問題３で得られた電磁波に対し次の問いに答えよ。

(1) ポインティングベクトル$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}))$ を使って、単位時間に、この領域に入り込む電磁波とこの領域から出ていく電磁波のエネルギー差の一周期平均を求めよ。

(2) (1) で得られる電磁波のエネルギー差とエネルギー保存則との関係を述べよ。