平成 11 年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 C-II

１次元の空間内で質量 m の粒子が、次のポテンシャル $V(x)$ のもとで束縛されている。

$$V(x) = V_1 \ (x < 0),\ V(x) = 0 \ (0 < x < a),\ V(x) = V_2 \ (x > a)$$

ただし、$0 < V_1 \leq V_2$とする。$V(x)$ の形に対応して、x 軸を３つの領域 (I)$x < 0$、(II)$0 < x < a$ および (III)$x > a$ に分けることにする。次の設問に答えなさい。

(1) エネルギー Eの定常状態$\psi(x)$ に対するシュレディンガー方程式を書きなさい。

(2) 領域 (I) および (III) における波動関数を $x \to \pm\infty$ での境界条件に注意して求めなさい。

(3) 領域 (II) では波動関数は

$$\psi(x) = A\sin(kx + \delta)$$

と書ける。ここで、A、δは定数で、$-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ ととることができ、また kは Eの適当な関数である。kを Eで表しなさい。

また、波動関数の $x = 0, a$ における接続条件から、Eを決める方程式が

$$ka = n\pi - \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_1}} - \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_2}} \ (n = 1, 2, 3...)$$

で与えられることを示しなさい。ただし、$\arcsin x$ は $\sin\theta = x$ の解の主値 $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ を表す。

必要なら、公式 $\sin^2 x = (\cot^2 x + 1)^{-1}$を用いること。

(4) $0 \leq E \leq V_1$に注意して、束縛状態が存在するための条件を求めなさい。

(5) 束縛状態の数 Nを求めなさい。必要なら、Gauss 記号 $[x]$(=x を越えない最大の整数) を用いなさい。

(6) 基底状態から数えて n 番目のエネルギー固有状態の波動関数は、何個のゼロ点をもつか。問 (2)、(3) で求めた解を用いて答えなさい。

(7) 特に $V_1 = V_2$の場合、ハミルトニアンは $x = \frac{a}{2}$を中心とする反転に対し、不変である。この反転を表す演算子を$\hat{\mathcal{P}}$とする。$\hat{\mathcal{P}}\psi(x)$ をψで表しなさい。また、$\psi(x)$ がハミルトニアンの固有関数ならば、$\hat{\mathcal{P}}\psi(x)$ も固有関数であることを示しなさい。

(8) 前問と同じく $V_1 = V_2$の場合、基底状態はこの反転$\hat{\mathcal{P}}$に対し偶か奇か。また、第一励起状態はもし存在すれば、偶か奇か。答えを述べるだけでなく、これらの状態の波動関数を用いて説明も書きなさい。