平成 11 年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 C-I

二次元中心力ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$ 中を運動する質量 m の粒子を考える。ここでωは正の定数である。

(1) この粒子の運動を記述するラグランジュアンを極座標表示で表せ。

(2) 極座標表示での一般化運動量とハミルトニアンを求めよ。

(3) この系の保存量 (運動中に不変な量) を複数個求め、それらの物理的意味とそれらが保存される理由を簡潔に述べよ。

(4) 問 (2) で求めた一般化運動量を上記の保存量を用いて表せ。

(5) 運動方程式の解を求め、粒子が (x, y) 面内でどの様な運動をするかを簡潔に説明せよ。

前期量子論によると、運動量 p を持つ粒子はまた、波長 $2\pi\hbar/p$ をの波としての性質も併せ持っている。

(6) この粒子の波としての性質を考慮し、周期運動する粒子が満たすべき条件式を書き下せ。導出の過程も簡潔に示すこと。(簡単のため一次元系を考察してもよい。)

(7) 問 (4) で求めた一般化運動量の各々に上記の条件を適用し、問 (3) の保存量に対する量子力学的表式を導け。必要ならば次の積分公式を使ってよい。

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{(x_2-x)(x_1-x)}}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}\right)$$