平成１０年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 T-III

1. 体積 $V = L^3$の立方体中にある１個の３次元自由粒子の Hamiltonian は、m を質量、p を運動量とするとき、次式で与えられる：

$$H = \frac{1}{2m}p^2。 \tag{1}$$

(i) この粒子 $N(\ll 1)$ 個からなる系が、温度 Tの環境中におかれている。この系が古典統計力学に従う場合、分配関数 $Z(T, V, N)$ が次の形に与えられることを示せ：

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{h^3}\right)^N (2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}}.(k_B; \text{ボルツマン定数、}h = 2\pi\hbar\text{はプランク定数}) \tag{2}$$

(ii) (i) の結果をしようして、この系のエネルギー Eの平均値$< E >$と比熱 C_vを計算せよ。

(iii) この系の化学ポテンシャル$\mu(T)$ を求めよ。

(iv) 理想気体の成立条件（つまり古典統計が適用可能な条件)、「粒子間感覚が、$\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ から決まるド・ブロイ波長に比べて十分大きい」を求めよ。

2. この系のエネルギー状態が離散的である場合、i 番目の状態のエネルギーをϵ_i、i 番目の状態に存在する粒子の数を N_iとする。粒子が Bose 統計に従うとすると、大きな分配関数$\Xi(T, \mu)$ は

$$\Xi(T, \mu) = \prod_i \sum_{N_i=0}^{\infty} \exp\left\{-\beta N_i\left(\epsilon_i - \mu(T)\right)\right\} = \prod_i \left[1 - \exp\left\{-\beta\left(\epsilon_i - \mu(T)\right)\right\}\right] \tag{3}$$

と与えられる。

(i) i 番目の状態の平均の粒子数$< N_i >$が次の式で与えられることを示せ。

$$< N_i >= \frac{1}{\exp\left\{\frac{\epsilon_i - \mu(T)}{k_B T}\right\} - 1} \tag{4}$$

(ii) 化学ポテンシャル$\mu(T)$ が負でなければならない理由を述べよ。

3. この系を量子力学で扱うと、１個の粒子のエネルギー固有値は、

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (n_x, n_y, n_x)\text{ は正の整数）} \tag{5}$$

で与えられる。エネルギーを連続関数として表すと、エネルギー$\epsilon \sim \epsilon + \mathrm{d}\epsilon$に存在する単位体積当たりの平均粒子数$< N(\epsilon) >$は、状態に依存しない定数をまとめて A として

$$\langle N(\epsilon) \rangle = A\frac{\epsilon^s}{\exp\left\{\frac{\epsilon - \mu(T)}{k_B T}\right\} - 1} \tag{6}$$

と表せる。$\rho(\epsilon) = A\epsilon^s$はエネルギー$\epsilon$が$\epsilon \sim \epsilon + \mathrm{d}\epsilon$にある状態数、すなわち状態密度である。

(i) $\rho(\epsilon)$ のϵ依存性、つまり、s を求めよ。

(ii) (6) 式を使用して、化学ポテンシャル$\mu(T)$ を決める式を書け。

(iii) (6) 式を使用して、この Bose 粒子系の単位体積当たりの比熱を求める式を書け。

(iv) この系の比熱は、理想気体の成立条件をみたせば、1(ii) の結果に一致することを示せ。次の Gauss 積分の公式は証明なしで使用してよい。

$$I(n) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x; \quad I(0) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad I(2) = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$