平成１０年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 T-II

以下の設問にしたがって、Fourier 変換を使って、波動方程式の Green 関数を求め、運動する電荷が放出する輻射エネルギーを計算せよ。

1. 時間 t と空間座標$\boldsymbol{r}$に依存する関数 $f(\boldsymbol{r},t)$ に対する波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{c^2\partial t^2} - \Delta f = F \tag{1}$$

を考える。ここで、c は光速度、$F(\boldsymbol{r},t)$ は source 項で、与えられた関数である。$f(\boldsymbol{r},t)$ は、無限遠で条件

$$\lim_{|\boldsymbol{r}\to\infty} f = 0$$

を充たすものとする。この方程式の解を求めるために、$f(\boldsymbol{r},t)$ と $F(\boldsymbol{r},t)$ の Fourier 変換を考え、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r},t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega^{i\omega t}\mathrm{d}^3 k e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\hat{f}(\boldsymbol{k},\omega) \\ F(\boldsymbol{r},t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega^{i\omega t}\mathrm{d}^3 k e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\hat{F}(\boldsymbol{k},\omega) \end{aligned}$$

とおく。方程式 (1) の両辺を Fourier 変換して、$\hat{f}(\boldsymbol{k},\omega)$ と$\hat{F}(\boldsymbol{k},\omega)$ の関係を導け。

2. Green 関数の満たすべき方程式は、式 (1) で source 項を

$$F(\boldsymbol{r},t) = \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\delta(t-t_0)$$

と置いたものである。この場合に前問で求めた$\hat{f}(\boldsymbol{k},\omega)$ を Fourier 逆変換して、方程式 (1) の Green 関数 $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, t-t_0)$ で、時間に関する境界条件

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, t-t_0) = 0 \quad \mathrm{for} t - t_0 < 0$$

を満たすものを求めよ。境界条件を満たすには、Fourier 逆変換の際、$\omega \to \omega - i\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ で置き換え、最後に$\epsilon \to 0$ とおく。

3. 電荷密度$\rho(\boldsymbol{r},t)$、電流密度$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ が与えられたときの Maxwell の方程式を記し、Lorentz ゲージのもとでのスカラーポテンシャルϕとベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$に対する波動方程式を導け。

4. 上の問２で求めた Green 関数を使って、問３の波動方程式の解を導け。また、電荷の保存則から、求めた解が Lorentz の条件を満たすことを示せ。

5. 点電荷（電荷 q）の運動が、位置$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(t)$、速度$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}_0$、加速度 $bolda(t) = \dot{\boldsymbol{v}}$で与えられているとき、この電荷のつくる電場$\boldsymbol{E}$のうち、電荷からの距離 $R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$ に対し、$1/R$の依存性をもつ部分を求めよ。また、ポインティングベクトルを計算し、$|\boldsymbol{v}|/c \ll 1$ の場合に、荷電粒子が単位時間当たりに放出する全輻射エネルギーをもとめよ。磁場$\boldsymbol{B}$については、輻射場では、進行方向と電場$\boldsymbol{E}$に直交し、$|\boldsymbol{B}| = \frac{1}{c}|\boldsymbol{E}|$ の関係を満たすことを利用せよ。