

平成10年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程(物理学分野) 入試問題

問題 T-I

1. スピン $\frac{1}{2}$ の粒子のスピン角運動量演算子を $\hat{S}_i (i = x, y, z)$ で表す。 $([\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$ 等に従う。) \hat{S}_x の固有状態を基底に選んだ場合の $\hat{S}_i (i = x, y, z)$ の行列表現を求めよ。
2. $R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\alpha\hat{S}_x/\hbar} e^{i\beta\hat{S}_y/\hbar} e^{i\gamma\hat{S}_z/\hbar}$ によるスピン波動関数の回転を考える。
 - i) オイラー角を定義する回転軸を選び直すことによって、 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ が行う回転操作を表すのに適当な(通常とは異なる)オイラー角を自分で定義し、この回転操作について説明せよ。
 - ii) 1.の基底において $R(\alpha, \beta, \gamma)$ の行列表現を求めよ。
 - iii) 回転が群を成すことにより、 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ が行う回転はある軸のまわりの1回の回転で実現できる。その回転の回転軸の方向ベクトルと回転角を求めよ。
3. このスピンに伴う磁気双極子モーメントが $m\hat{u} = a\hat{S}$ で与えられるとする。 yz 平面内で z 軸(の正方向)から y 軸(の正方向)に向かって θ の角をなす方向に強さ H の磁場がかかっている場合を考える。
 - i) 時刻 $t = 0$ に $\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hbar$ の固有状態にある場合に、時刻 t において $\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hbar$ 、 $\hat{S}_y = \frac{1}{2}\hbar$ 、 $\hat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar$ の固有状態にある確率をそれぞれ求めよ。
 - ii) i)の確率の和が1を越える場合がある理由について説明せよ。
4. 3.の磁場中に3.の磁気双極子モーメントを持つスピン $\frac{1}{2}$ の粒子が2つ存在する系を考える。スピン間の相互作用ハミルトニアンは $b\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$ で与えられるとする。ここで、 \hat{S}_i は i 番目の粒子のスピン角運動量演算子である。この2スピン系のエネルギーの固有値と固有波動関数を求めよ。但し、固有波動関数は1.の基底において表せ。
5. 3.の磁場中に3.の磁気双極子モーメントをもつスピン $\frac{1}{2}$ の粒子が多数存在する系を考える。但し、4.で考えたスピン間の相互作用は存在しないものとせよ。
 - i) 時刻 $t = 0$ にこの系におけるスピン角運動量の期待値が $\hat{S}_x = c\hbar$ 、 $\hat{S}_y = d\hbar$ 、 $\hat{S}_z = e\hbar$ であるとき、この系の $t = 0$ における密度行列を求めよ。
 - ii) 密度行列が満たすべき性質より i) の c, d, e の取りうる値に対する条件を求めよ。特に不等式で表される条件式について等号が成立する場合の系の状態について説明せよ。
 - iii) 時刻 t におけるスピン角運動量 \hat{S}_x の期待値を求めよ。