

平成10年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程(物理学分野)入試問題

問題 C-IV

格子点あたり1個の原子からなる固体(格子点の数 N)を考える。この固体における熱励起を同一の固有振動数 ω を持ち互いに独立な $N\nu$ (ν はある整数)の1次元調和振動子からなる系として扱うことにする。各調和振動子のエネルギー順位は $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, ($n = 0, 1, 2, \dots$)で与えられる。ただし、 ω は固体の体積 V の関数であるとする。

問1 与えられた温度 T および体積 V のもとの1個の調和振動子の分配関数 z を求めよ。ただし Boltzmann 定数を k_B とせよ。

問2 系全体のヘルムホルツの自由エネルギー $F_1(T, V)$ を求め、十分高温において

$$F_1 = N\nu k_B T \ln \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

となることを示せ。

問3 十分高温での定積比熱を求めよ。また ν の値としては何が適当か、理由とともに答えよ。

一般に固体には上で求まる自由エネルギー以外に、温度に依存しない自由エネルギーの寄与があり、これを $F_0(V)$ と書くことにする。系の全自由エネルギー F は、 $F_0(V)$ と問2の $F_1(T, V)$ の和であると考えられる。

問4 十分高温における固体の圧力 P を与える式を求めよ。ただし $P_0 \equiv -\partial F_0 / \partial V$ を用いよ。

問5 問4で得た結果から P 一定の条件下で温度を ΔT_c だけ上昇させたときの体積変化 ΔV を求めよ。ただし、 $\frac{\partial P_0}{\partial V}$ に比べて $N\nu k_B T \frac{\partial^2}{\partial V^2} \ln \omega$ は無視できるとする。

問6 固体の熱膨張率が正であるためには、 ω の V 依存性についてどのような条件が必要か。