平成１０年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 C-III

ハミルトニアンが、

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

である、一次元調和振動子を考える。この系のエネルギー児湯内は、$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$、$n$：負でない整数）となることが知られている。このことを利用して次の問いに答えよ。

(1) 基底状態の座標表示での規格化された波動関数を、be^{-ax^2}の形を仮定して求めよ。（積分公式：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi\alpha}$を用いても良い。）

(2) 前問で得られた基底状態に対して、期待値$< x >$および$< x^2 >$を求めよ。

(3) 基底状態の運動量表示での規格化された波動関数をもとめよ。

(4) 次の交換関係式を求めよ。

$$\begin{array}{llll} (I) & [xp, x], & (II) & [xp, x^2], \\ (III) & [xp, p], & (IV) & [xp, p^2]. \end{array}$$

(5) Hの任意のエネルギー固有状態に対して、$\langle [xp, H] \rangle = 0$ を示せ。また、このことと (4) の結果より、一般のエネルギー固有状態に対して、運動エネルギーの期待値とポテンシャルエネルギーの期待値が等しいこと、つまり、$\left\langle \frac{1}{2m}p^2 \right\rangle = \left\langle \frac{m\omega^2}{2}x^2 \right\rangle$を証明せよ。

ハミルトニアンに摂動が加わり、

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - mgx$$

となった。

(6) このハミルトニアンのエネルギー固有値を求めよ。

(7) 一般のエネルギー固有状態について、

$$(I) \left\langle \frac{1}{2m}p^2 \right\rangle - \left\langle \frac{m\omega^2}{2}x^2 \right\rangle, \qquad (II) \left\langle p^2 \right\rangle,$$

の値を求めよ。