平成１０年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 C-II

以下の問題においては MKSA 単位系を使うこと。必要なら真空の誘電率としてϵ_0を使いなさい。

問１ 真空中に、磁束密度が０で電荷密度分布が$\rho(x,y,z)$ である系がある。a) この系の電磁気的性質は、電場$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}V$となるスカラー関数 $V(x,y,z)$ によって、完全に決定されることをマクスウェル方程式を前提にして示しなさい。また、Vのみたすべき方程式を求めなさい。b) さらに、この Vは電荷のないところではラプラス方程式をみたすことを示しなさい。

問２ 極座標表示のラプラス方程式は、

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0$$

であたえられる。ここで、極座標 (r,θ,φ) と直交座標 (x,y,z) の関係は$x=r\sin\theta\cos\varphi$,$y=$
$r\sin\theta$
$sin\varphi$,$z=r\cos\theta$ であたえられる。

さらに、系が z軸回りの回転に対し物理的に不変で、かつ系の領域がθの全範囲$0\leq\theta\leq\pi$のとき、この方程式の解 $V(r,\theta)$ は、変数分離解 $v=R(r)P_1(\cos\theta)$ をもつ。$P_l(\cos\theta)$は直交関数系であるルジャンドル多項式であり、

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P_l(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)=-l(l+1)P_l(\cos\theta)$$

をみたす。lは０を含む正の整数である。$R(r)=Ar^n$ (A,n：定数）を仮定して、n を求めなさい。

問３ 問２の場合の $V(r,\theta)$ の一般解を求めなさい。

問４ 真空中において、半径 a の薄い球殻に、軸対称の電荷を分布させ面電荷密度$\sigma(\theta)$ をあたえ、球殻上に静電ポテンシャル $V_0\cos\theta$を作れたとする。ここでθは対称軸となす角度である。問３の $V(r,\theta)$ の一般解を使って、球殻外のポテンシャルと球殻内のポテンシャルとを求めなさい。

なお、$P_l(\cos\theta)$の最初の３項は、$P_0(\cos\theta)=1$, $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$, $P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$ となる。必要ならば使ってよい。

問５ 問４の電荷密度分布関数$\sigma(\theta)$ を求めなさい。