平成１０年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 C-I

図のように質量 m の質点を長さ l の糸で吊した２つの単振り子をバネ（質量は無視でき、バネ定数は k とする）で結合する。２つの単振り子の支点間距離はバネの自然長に等しくとる。この連成振動系の重力下（重力の加速度：g）での微少振動（図の面内での振動）を考える。微少振動の場合バネは常に水平を保って運動し、傾かないと近似できる。

(1) ２つの単振り子の振れ角 θ_1 と θ_2 を一般座標として Lagrangian L を求めよ。ただし、$\sin\theta = \theta$、$\cos\theta = 1 - \theta^2/2$ のように θ の２次までの近似とせよ。

(2) Euler-Lagrange 方程式をたて、$\theta_1 = A_1\cos(\omega t + \phi)$、$\theta_2 = A_2\cos(\omega t + \phi)$ などの特解を持つとして、この方程式を $WA = \omega^2 A$ の形式にまとめることができる。ここで ω, t, ϕ はそれぞれ角振動数、時間、初期位相であり、A は振幅 A_1, A_2 を成分とする縦ベクトルである。２行２列の行列 W を求めよ。ただし $\sqrt{g/l}$ を ω_0、k/m を α とおけ。

(3) $WA = \omega^2 A$ において、W の固有値 ω_1^2, ω_2^2 $(\omega_1^2 > \omega_2^2)$ を求めよ。また固有値 ω_1^2 と ω_2^2 に属する W の固有ベクトル（長さ１のベクトルに規格化すること）をそれぞれ $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ としたとき、行列 $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ。

(4) θ_1, θ_2 を成分とする縦ベクトルを θ として、$Q = a^{-1}\theta$ なる座標変換を考える。縦ベクトル Q の成分 Q_1, Q_2 を一般化座標として、(1) で求めた Lagrangian L を書き直せ。また一般化運動量の定義を示しながら Q_1, Q_2 に対する一般化運動量 P_1, P_2 を求めよ。さらに、今書き直した L の Legendre 変換として Hamiltonian H を定義し、これを求めよ。

(5) 求めた Hamiltonian H から、Q_1, Q_2 がそれぞれ角振動数 ω_1, ω_2 で互いに独立に調和振動することを説明せよ。

(6) Q_1 と Q_2（規準座標）とで特徴づけられる互いに独立な２つの調和振動（規準振動）の様子を、もとの座標である θ_1 と θ_2 との関連において説明せよ。またその振動の様子を図示（振動方向は矢印で表せ）せよ。