§13 磁場中の電子

[1] 質量 m と電荷 $e>0$ を持つ古典粒子が電磁場中を運動している。Gauss 単位系を採用すると、この粒子に対する Langrangian は次式で与えられる。

$$L(\dot{\mathbf{r}},\mathbf{r},t)=\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2+\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{r}}-\mathrm{e}\phi.$$

ここで $\dot{\mathbf{r}}\equiv d\mathbf{r}/dt$ は速度、c は光速、また $\phi=\phi(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ はそれぞれ電磁場のスカラー・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルである。

(a) 運動方程式が次式で与えられることを示せ。

$$m\ddot{\mathbf{r}}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}. \tag{1}$$

ただし、$\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ は次式で与えられる電磁場である。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\qquad \mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}.$$

(1) 式の右辺を Lorentz 力と呼ぶ。

(b) Hamiltonian が次式で与えられることを示せ。

$$H(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\phi,\qquad \mathbf{p}\equiv m\dot{\mathbf{r}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{2}$$

[2] 質量 m と電荷 $e>0$ を持つ古典粒子が z 方向を向いた磁束密度 B の一様磁場中を運動している。$t=0$ における粒子の速度は $\mathbf{v}_0=(0,v_0,0)$ であった。この場合について運動方程式 (1) を解き、$t>0$ における粒子の軌道が角振動数 $\omega_{\mathrm{c}}=eB/mc$ を持つ円運動となることを示せ。(ω_{c} をサイクロトロン振動数と呼ぶ。)

[3] 質量 m と電荷 $e>0$ を持つ粒子が一様磁場中を運動している。その軌道運動に対する量子力学的 Hamiltonian は、(2) 式で $\mathbf{p}\to\hat{\mathbf{p}}$ および $\phi=0$ とすることで得られ、次式で与えられる。

$$\hat{H}=\frac{\hat{\boldsymbol{\Pi}}^2}{2m},\qquad \hat{\boldsymbol{\Pi}}\equiv-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{3}$$

以下、磁場を z 軸方向にとり、$A_z=0$ と置く。このとき、磁束密度の大きさを B として、$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=B\mathbf{e}_z$。また、平面波で記述される z 方向の運動は考察から除外する。

(a) 次の交換関係を証明せよ。

$$[\hat{\Pi}_x,\hat{\Pi}_y]=i\frac{\hbar^2}{l_{\mathrm{c}}^2},\qquad l_{\mathrm{c}}\equiv\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}\text{：磁気長}.$$

(b) $\hat{\Pi}_x$ と $\hat{\Pi}_y$ の線型結合 $\pm i\hat{\Pi}_x+\hat{\Pi}_y$ から、$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$ を満たす生成消滅演算子 $\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}$ を構成せよ。

(c) Hamiltonian が演算子 $\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}$ を用いて次のように表せることを示せ。

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_\mathrm{c}, \qquad \omega_\mathrm{c} \equiv \frac{eB}{mc}. \tag{4}$$

(d) 基底状態の波動関数 ψ_0 を決める式が $\hat{a}\psi_0 = 0$ で与えられることを示せ。

(e) (4) 式の固有値 E と固有関数 ψ が、次式で与えられることを示せ。

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_\mathrm{c}, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \quad \text{：Landau 準位}, \tag{5a}$$

$$\psi_n(x, y) = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0(x, y). \tag{5b}$$

[4] 問題 [3] における波動関数の具体形を、$\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ の場合に求める。

(a) $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = B\mathbf{e}_z$ を確かめよ。

(b) $[\hat{p}_y, \hat{H}] = 0$ を証明せよ。ただし、$\hat{p}_y$ は運動量演算子の y 成分を表す。

(c) (b) の結果より、(x, y) 面内の固有関数を $\psi(x, y) = X(x)\mathrm{e}^{ik_y y}$ と置いて、$X(x)$ に作用する生成消滅演算子 $\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}$ の具体形を x と k_y で表せ。

(d) 基底状態の波動関数 $X_0(x)$ を求めよ。規格化定数は A と置いてよい。

(e) 励起状態の波動関数 $X_n(x)$ を求めよ。

(f) 系が一辺 L $(\gg l_\mathrm{c})$ の正方形である場合について、基底状態 $n = 0$ の縮重度を求めよ。

[5] 問題 [3] における波動関数の具体形を、$\mathbf{A} = \dfrac{B}{2}(-y, x, 0)$ の場合に求める。

(a) $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = B\mathbf{e}_z$ を確かめよ。

(b) $[\hat{L}_z, \hat{H}] = 0$ を証明せよ。ただし、$\hat{L}_z$ は軌道角運動量演算子の z 成分を表す。

(c) 独立変数として、(x, y) の代わりに $(z, z^*) = \dfrac{1}{\sqrt{2}l_c}(x + iy, x - iy)$ を用いる。ただし、$l_c \equiv \sqrt{\hbar c/eB}$。このとき、生成消滅演算子 $\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}$ を z と z^* で表せ。

(d) 基底状態の波動関数 ψ_0 を、$\hat{H}$ と $\hat{L}_z$ の同時固有関数となるように、z と z^* の関数として求めよ。規格化定数は A と置いてよい。固有関数は複数個ある。

(e) 規格化定数 A を求めよ。

(f) 励起状態の波動関数 ψ_n を z と z^* の関数として求めよ。

(g) 基底状態 $n = 0$ について $r^2 \equiv x^2 + y^2$ の期待値を求めよ。

(h) 系が半径 R $(\gg l_\mathrm{c})$ の円盤である場合について、基底状態 $n = 0$ の縮重度を求めよ。