§12 角運動量とスピン

[1] ３つの Hermite 演算子 $\hat{j}_x$、$\hat{j}_y$、$\hat{j}_z$ が次の交換関係を満たすものとする。

$$[\hat{j}_x, \hat{j}_y] = i\hat{j}_z, \quad [\hat{j}_y, \hat{j}_z] = i\hat{j}_x, \quad [\hat{j}_z, \hat{j}_x] = i\hat{j}_y. \tag{1}$$

(a) 演算子 $\hat{j}^2$ を

$$\hat{j}^2 \equiv \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + \hat{j}_z^2, \tag{2}$$

で定義する。$\hat{j}^2$ と $\hat{j}_z$ が可換であることを示せ。

(b) 演算子 $\hat{j}_z$ の固有値と固有状態をそれぞれ m と $|m\rangle$ で表す。m に上限 m_{max} 及び下限 m_{min} が存在することを示せ。

(c) 演算子 $\hat{j}_\pm$ を

$$\hat{j}_\pm \equiv \hat{j}_x \pm i\hat{j}_y \tag{3}$$

で定義する。$\hat{j}_\pm|m\rangle \propto |m \pm 1\rangle$ を証明せよ。

(d) m の最大値を $m_{\max} \equiv j$ とする。$|j\rangle$ が $\hat{j}^2$ の固有状態でもあり、その固有値が $j(j+1)$ であることを証明せよ。

(e) 一般の m について、$\hat{j}^2|m\rangle = j(j+1)|m\rangle$ を証明せよ。

(f) $\hat{j}_\pm|m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|m \pm 1\rangle$ と書けることを示せ。

(g) j の可能な値が整数又は半整数に限られることを示せ。

[2] (1) 式と (2) 式で定義される演算子 $\hat{j}_z$ と $\hat{j}^2$ の同時固有状態を $|jm\rangle$ で表す。これらは次式を満たす。

$$\hat{j}_z|jm\rangle = m|jm\rangle, \quad \hat{j}_\pm|jm\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle, \quad \hat{j}^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle. \tag{4}$$

ただし、演算子 $\hat{j}_\pm$ は (3) で定義されている。固有状態 $|jm\rangle$ は、$\langle jm|jm\rangle = 1$ と規格化されているものとする。

(a) $\hat{j}_z$ 等のエルミート性を用いて、異なる固有値に属する固有関数が直交すること、すなわち、$\langle j'm'|jm\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$ を証明せよ。

(b) $\langle j'm'|\hat{j}_\pm|jm\rangle$ を求めよ。[これは $j = j'$ のとき、$(2j{+}1)$ 次元正方行列の成分 $(\hat{j}_\pm)_{m'm} \equiv \langle jm'|\hat{j}_\pm|jm\rangle$ を表す。]

(c) $j = \frac{1}{2}$、1 の場合に $\hat{j}_x$、$\hat{j}_y$、$\hat{j}_z$ の行列表現を求めよ。

(d) (c) で求めた表現行列が、(1) 式と同じ関係を満たすことを確かめよ。

[3] $\hbar$ を単位とする軌道角運動量演算子を $\hat{\mathbf{l}} \equiv \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}/\hbar$ で定義する。極座標における $\hat{l}_z$ と $\hat{l}^2$ の表現は以下のようになる。

$$\hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad \hat{l}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

$\hat{l}_z$ と $\hat{l}^2$ の同時固有関数 $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ を求めよ。

[4] $s = \frac{1}{2}$ をもつスピンに関する以下の問いに答えよ。

(a) 単位ベクトル $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 方向のスピン演算子 $\hat{s}_n = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ の固有状態を、$\hat{s}_z$ の固有状態 $|\alpha\rangle \equiv |s_z = \frac{1}{2}\rangle$ および $|\beta\rangle \equiv |s_z = -\frac{1}{2}\rangle$ の線型結合として表せ。

(b) (a) の状態において $\hat{s}_x$ を観測したとき、$\frac{1}{2}$ の値が得られる確率を求めよ

[5] 大きさ $\frac{1}{2}$ のスピンが z 方向の磁場 H と相互作用している。この相互作用は、Zeeman 項と呼ばれる次の Hamiltonian で記述できる。

$$\hat{H}_s \equiv -\mu_s H \hat{s}_z.$$

ただし、μ_s はスピン磁気モーメントとよばれる定数である。時刻 $t = 0$ にスピンが $s_x = \frac{1}{2}$ の固有状態にあるとき、時刻 t において $s_x = \frac{1}{2}$、$s_y = \frac{1}{2}$、$s_z = \frac{1}{2}$ が観測される確率をそれぞれ求めよ。

[6] 2つの可換な角運動量 $\hat{\mathbf{j}}_1$ と $\hat{\mathbf{j}}_2$ ($[\hat{j}_{1i}, \hat{j}_{2k}] = 0;\ i, k, = x, y, z$) がある。$\hat{j}_1^2$ と $\hat{j}_2^2$ の固有値は、それぞれ $j_1(j_1 + 1)$ と $j_2(j_2 + 1)$ であるとする。この系の全角運動量 $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2$ を考え、$\hat{j}^2$ の固有値を $j(j + 1)$ とする。このとき、j の取り得る値が

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \cdots, |j_1 - j_2|, \tag{5}$$

であることを示せ。

[7] 2つの角運動量 j_1 と j_2 からなる系がある。全系の状態を表す基底として

$\hat{j}_{1z}$と$\hat{j}_{2z}$の同時固有状態 $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$;　　　$\hat{j}^2$と$\hat{j}_z$の同時固有状態 $|j_1, j_2; j, m\rangle$

の2通りが可能である。この2つの基底をつなぐ変換係数を Clebsch-Gordan (CG) 係数という。$j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ の場合に対する次の問いに答えよ。

(a) j の可能な値と対応する縮重度を書き下せ。

(b) CG 係数 $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; m_1, m_2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; j, m\rangle$ を求めよ。

(c) $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; j, m\rangle$ を $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; m_1, m_2\rangle$ の線型結合として表せ。

[8] $j_1 = 1$ および $j_2 = \frac{1}{2}$ の場合における CG 係数 $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m\rangle$ を求めよ。

[9] スピン $\frac{1}{2}$ を持つ粒子が、中心力ポテンシャル内で運動し、軌道角運動量 $l = 1$ の状態にある。

(a) この粒子の全角運動量としてどの様な状態が可能か。

(b) この系にスピン軌道相互作用 $\lambda \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ が加わった場合を考える (λ：比例定数)。この場合も、$\hat{l}^2$、$\hat{s}^2$、$\hat{j}^2$、$\hat{j}_z$ ($\hat{\mathbf{j}} \equiv \hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}}$) が全系の Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) + \lambda \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}} \tag{6}$$

と可換であることを示せ。

(c) スピン軌道相互作用が有限の大きさを持つ場合について、$\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}(\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2)$ を用いて、j の異なる状態間のエネルギー分裂を調べよ。