超伝導状態の輸送方程式における ゲージ不変性とホール項

北大･理･物理
北　孝文

- 輸送方程式について
  - 研究の歴史
  - 微視的導出法
  - 問題点－Hall 項
  - 超伝導体の Hall 効果の実験
- 非平衡状態の摂動論—Keldyshの方法
- 輸送方程式の微視的導出と問題点
- ゲージ不変性とホール項
- まとめ

ドイツでの生活

バイロイト
10月－3月

カールスルーエ
4月－9月

カールスルーエのお城

モーゼル渓谷

ザルツカンマーグート（オーストリア）

バイロイト近郊

ドイツでの研究

●超流動 ^{3}He の渦構造（Karlsruhe）

T. Kita: Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 834

●超伝導体のde Haas-van Alphen効果〔安井〕

K. Yasui and T. Kita:

J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001) 2852;

cond-mat/0103336

●超伝導状態の輸送方程式（Bayreuth)

T. Kita: Phys. Rev. B**64** (2001) 054503;

cond-mat/0103520

輸送方程式研究の歴史

●Boltzmann方程式(1872)

希薄気体；　H定理の証明

●Landau-Boltzmann方程式(1956)

フェルミ流体，相互作用強

●Landau-Boltzmann方程式の微視的導出
Landau(1958) , Kadanoff-Baym(1961-2)
Keldysh(1964)

Dyson方程式出発点，準粒子近似（寿命 τ 大）
保存則成立の条件(Kadanoff-Baym)
動的な場合の摂動論（Keldysh）

●準古典方程式の導出(ξ 積分)
Prange-Kadanoff（1964)

寿命 τ が小さくてもOK，適用範囲大

●超伝導体の準古典方程式

Eilenberger(1968)—静的な場合（松原）
Larkin-Ovchinnikov(1968)—より簡便な導出
Eliashberg (1971) —動的な場合(Keldysh)

●超流動 ^{3}He への適用
Serene-Rainer(1983)

●Landau-Boltzmann方程式･準古典方程式におけるホール効果
Levanda-Fleurov(1994), Kopnin(1994-),
Larkin-Ovchinnikov(1995)
Houghton-Vekhter(1998)

ホール項の微視的導出

ボルツマン方程式

分布関数 $f(\mathbf{p},\mathbf{r},t)$ の時間変化

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+(e\mathbf{E}+e\mathbf{v}\times\mathbf{h})\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=I[f]$$

ドリフト　　外場　　衝突

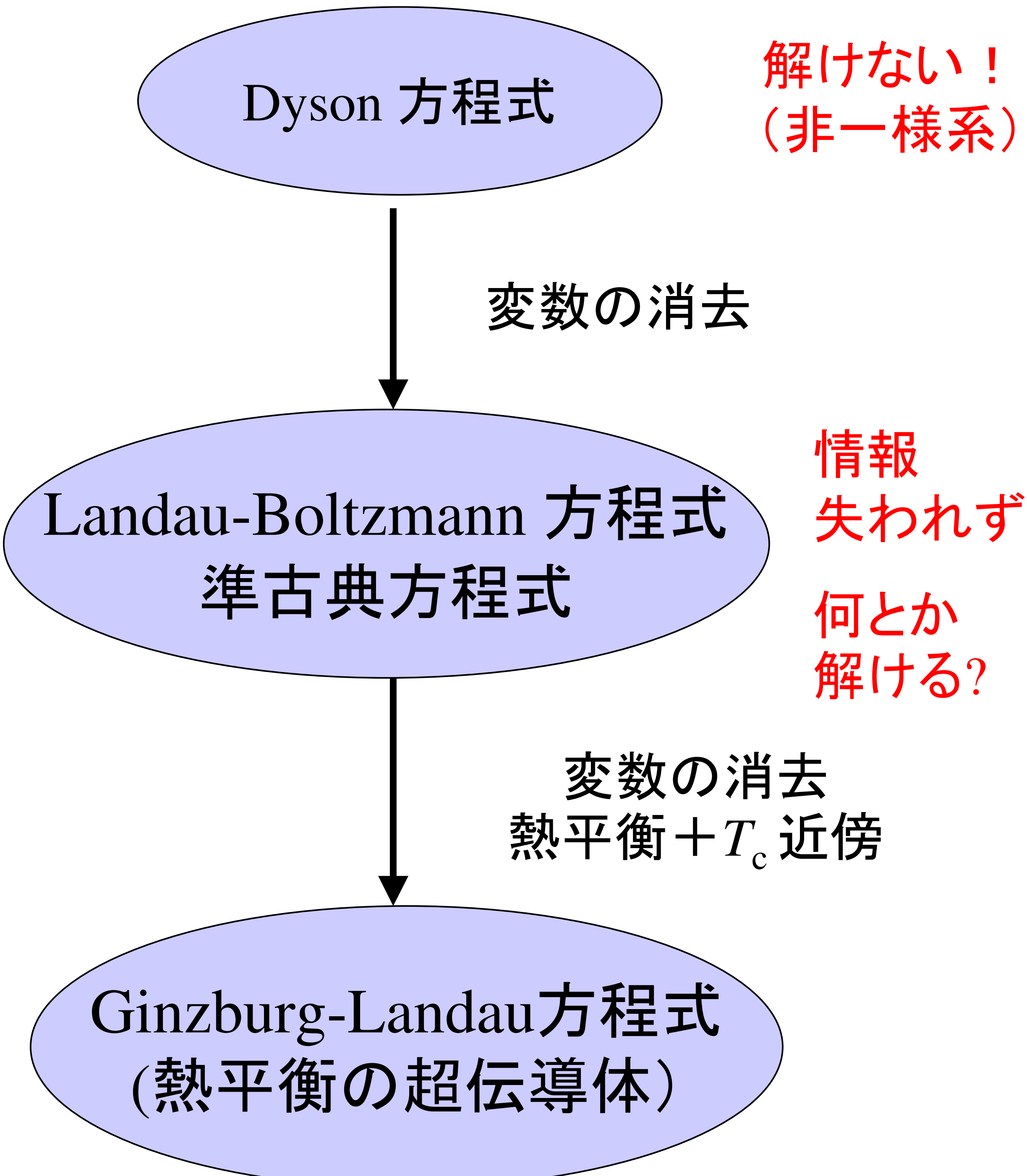
Lorentz力

$$\begin{cases}\mathbf{E}: & \text{(微視的)電場}\\ \mathbf{h}: & \text{(微視的)磁場}\end{cases}$$

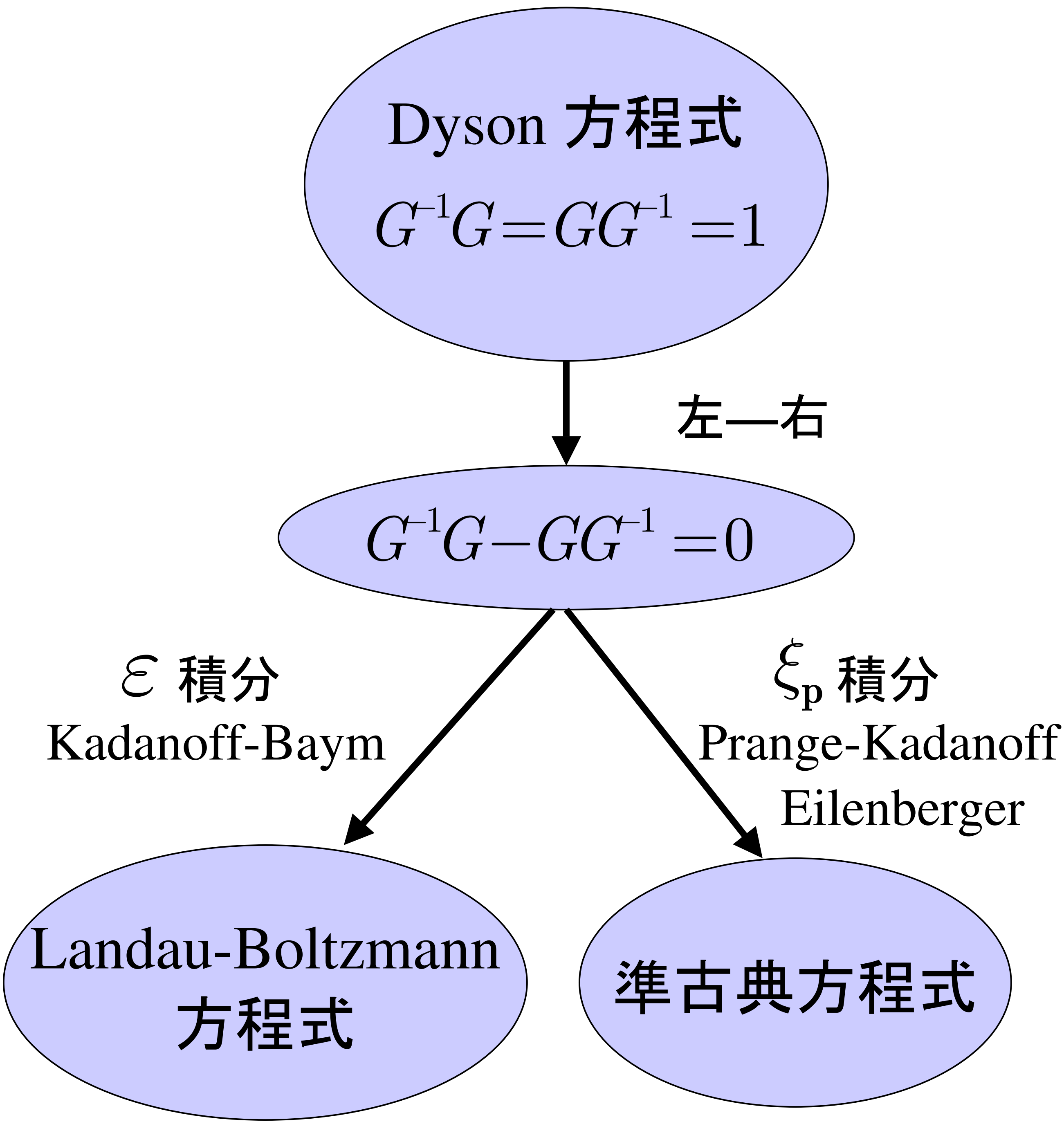
$$\Downarrow$$

希薄気体・単純金属の性質

なぜ輸送方程式か？


Dyson 方程式
解けない！
（非一様系）
変数の消去
Landau-Boltzmann 方程式
準古典方程式
情報
失われず
何とか
解ける?
変数の消去
熱平衡＋T_c 近傍
Ginzburg-Landau方程式
(熱平衡の超伝導体）

輸送方程式の微視的導出法



問題点

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+(e\mathbf{E}+e\mathbf{v}\times\mathbf{h})\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=I[f]$$

の $(e\mathbf{v}\times\mathbf{h})\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$ の項が出てこない！？

- 存在するのか？
  （手で付け加えればよい？）
- 高周波の外場については？
- 超伝導体では？

高温超伝導体YBCOのホール効果

ホール抵抗の符号が反転！

● Bardeen & Stephen (‘65)

$$\rho_{xx} \propto B/H_{c2}$$

$$\rho_{xy} \propto B^2/H_{c2}$$

● Nozieres & Vinen (‘66)

$$\rho_{xx} \propto B/H_{c2}$$

$$\rho_{xy} \propto B/H_{c2}$$

● Time-dependent GL

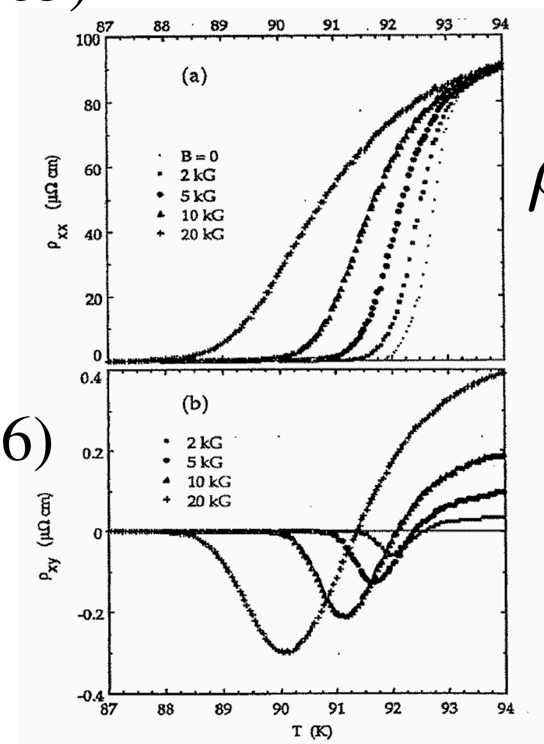


FIG. 1. (a) Resistivity and (b) Hall resistivity for epitaxial $YBa_2Cu_3O_7$ film near T_c.

ρ_{xx}

ρ_{xy}

Hagen *et. al.* ‘93

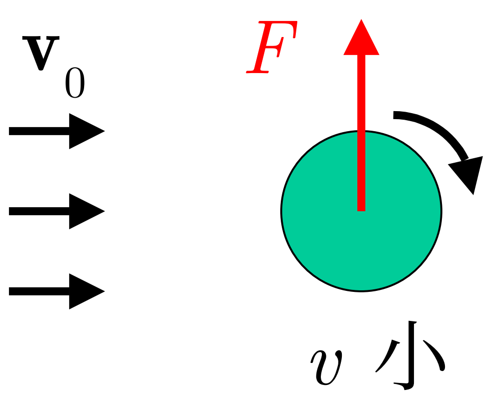
理論は符号反転を説明できない！

単一渦糸に働く力

(渦糸の運動 → 電気抵抗)

- Ao & Thouless (‘93)

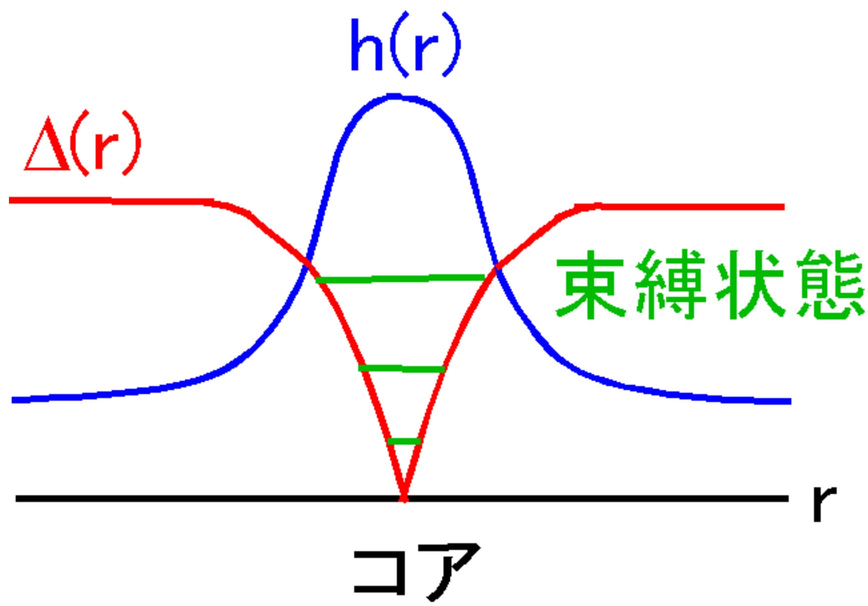
横方向の力はマグナス力のみ！？
（クッタージューコフスキーの揚力）



$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=一定$$

Bernoulliの定理

ローレンツ力は？



$$e(\mathbf{v}\times\mathbf{h})\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \quad ?$$

超伝導体のHall効果はよくわかっていない！
（基礎方程式の不在）

グリーン関数

● シュレーディンガー方程式

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H\right)\psi(\mathbf{r}t)=0$$

● グリーン関数

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}-H_1\right)G(\mathbf{r}_1t_1,\mathbf{r}_0t_0)=\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\delta(t_1-t_0)$$

（$G^{-1}G=1$　と行列表示できる）

● 時刻 $t_1 > t_0$ の解

$$\psi(\mathbf{r}_1t_1)=\int G(\mathbf{r}_1t_1,\mathbf{r}_0t_0)\psi(\mathbf{r}_0t_0)d\mathbf{r}_0$$

- $H = -\dfrac{\nabla^2}{2m}$（自由粒子）のとき

$$G(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_0 t_0) = \int \frac{d\mathbf{p}\, d\varepsilon}{(2\pi)^4} G(\mathbf{p}\varepsilon) \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) - i\varepsilon\cdot(t_1 - t_0)}$$

$$G(\mathbf{p}\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - p^2/2m}$$

- $H=H_0+V$ のとき

$$G = (G^{-1})^{-1} = (G_0^{-1} - V)^{-1} = [(1 - G_0 V)]^{-1} G_0$$

$$= G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \cdots$$

$$\leftarrow + \leftarrow \times \leftarrow + \leftarrow \times \leftarrow \times \leftarrow + \cdots$$

t

ゲージ不変性

- シュレーディンガー方程式

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H\right)\psi(\mathbf{r}t)=0$$

$$H=\frac{1}{2m}\left(\frac{\nabla}{i}-e\mathbf{A}(\mathbf{r}t)\right)^2+e\Phi(\mathbf{r}t)+V(\mathbf{r})$$

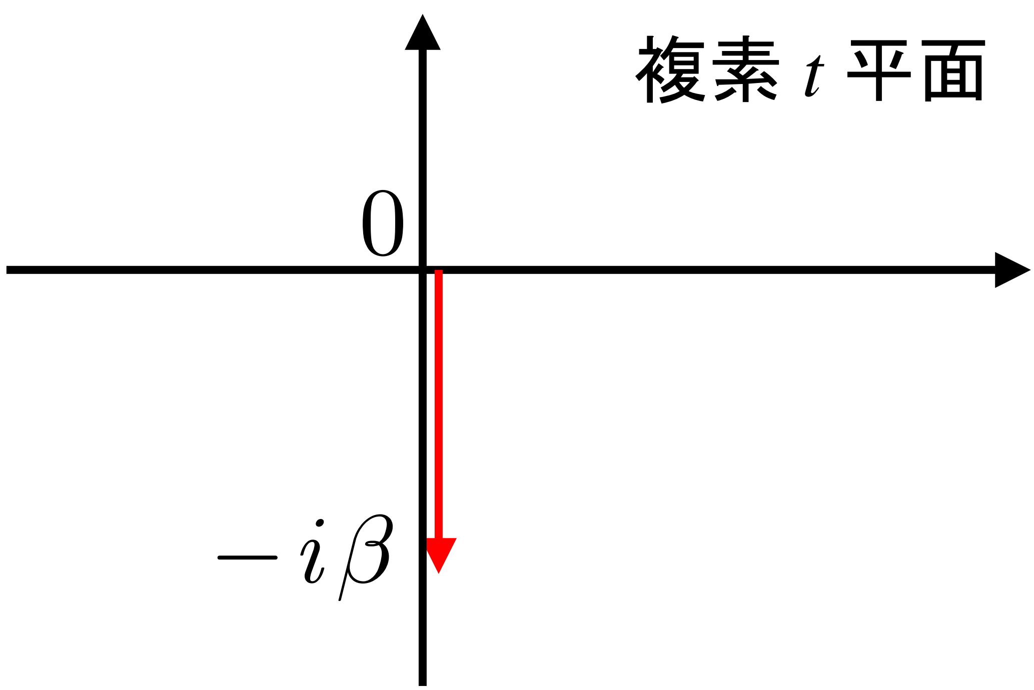
は変換

$$\begin{cases}\psi(\mathbf{r}t)\rightarrow\exp[ie\chi(\mathbf{r}t)]\psi(\mathbf{r}t)\\ \mathbf{A}(\mathbf{r}t)\rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{r}t)+\dfrac{\partial\chi(\mathbf{r}t)}{\partial\mathbf{r}}\\ \Phi(\mathbf{r}t)\rightarrow\Phi(\mathbf{r}t)-\dfrac{\partial\chi(\mathbf{r}t)}{\partial t}\end{cases}$$

に対し不変（形が変化せず）

熱平衡状態の摂動論

$$H = H_0 + H_1$$



$(0, -i\beta)$ の区間での摂動展開

摂動展開と松原グリーン関数

$$\mathrm{e}^{-\beta H} = \mathrm{e}^{-\beta H_0} U(\beta)$$

$$U(\beta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^\beta d\tau_1 \cdots$$

$$\times \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n H_1(\tau_1) \cdots H_1(\tau_n)$$

$$H_1(\tau) = \mathrm{e}^{\tau H_0} H_1 \mathrm{e}^{-\tau H}$$

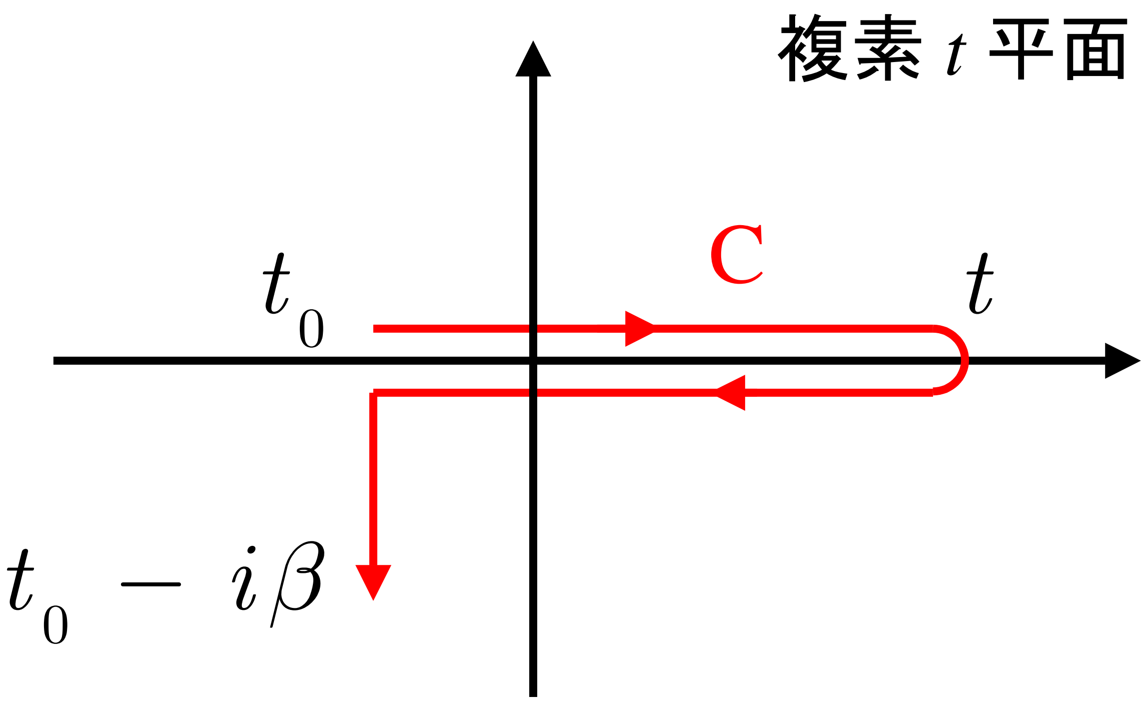
松原グリーン関数

$$G(\tau_1, \tau_2) = -\left\langle \mathrm{T}_\tau \psi(\tau_1) \psi^\dagger(\tau_2) \right\rangle$$

$\mathrm{T}_\tau : (0, -i\beta)$での演算子の整列

非平衡状態の摂動論
(力学的摂動)

$$\mathcal{H}(t) = H + H'(t)\theta(t - t_0)$$



曲線C上での摂動展開

量子リウヴィル方程式（密度行列の時間発展）

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -i[\mathcal{H}(t), \rho(t)]$$

解：$$\rho(t) = S(t, t_0)\rho(t_0)S^\dagger(t, t_0)$$

$$S(t, t_0) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots$$

$$\times \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{H}(t_1)\cdots\mathcal{H}(t_n)$$

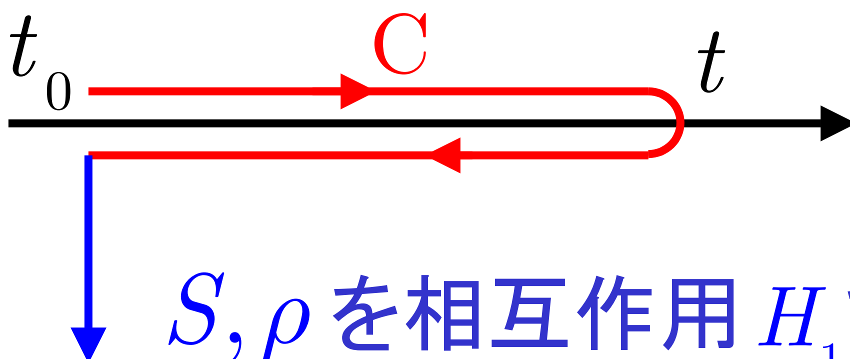
演算子$\mathcal{O}$の期待値

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \mathrm{Tr}\rho(t)\mathcal{O}$$

$$= \mathrm{Tr}\rho(t_0)S^\dagger(t, t_0)\mathcal{O}S(t, t_0)$$

演算子の期待値

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \mathrm{Tr}\,\rho(t_0) S^\dagger(t,t_0)\mathcal{O}S(t,t_0)$$



S, ρ を相互作用 H_1 で再展開

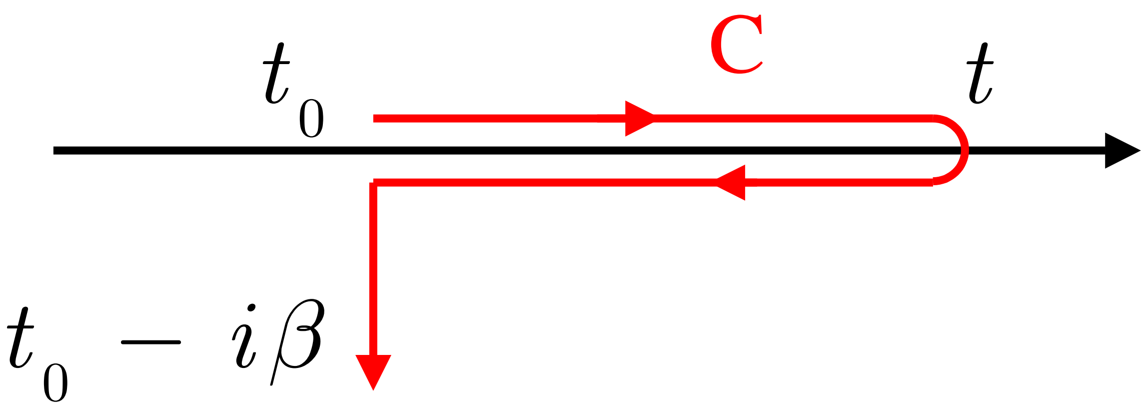
Contour-Ordered Green's function

$$G(t_1,t_2) = -i\left\langle \mathrm{T_C}\psi(t_1)\psi^\dagger(t_2)\right\rangle$$

$\mathrm{T_C}$: C上での演算子の整列

- 平衡状態と同じテクニックが使える！
- 非線形効果まで扱える（力学的摂動）！

Keldysh グリーン関数



$$G^{\mathrm{R}} \equiv G_{上上} - G_{上下} \quad : 遅延$$

$$G^{\mathrm{A}} \equiv G_{上上} - G_{下上} \quad : 先進$$

$$G^{\mathrm{K}} \equiv G_{上下} + G_{下上} \quad : \mathrm{Keldysh}$$

$$\check{G} \equiv \begin{bmatrix} G^{\mathrm{R}} & G^{\mathrm{K}} \\ 0 & G^{\mathrm{A}} \end{bmatrix}$$: Keldysh 行列

を用いた摂動展開（1964）

一様系

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} + \mu \right] \check{G}(1,2) = \check{1}\,\delta(1,2) \qquad 1 \equiv (\mathbf{r}_1, t_1)$$

$$\check{G}(1,2) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \check{G}(\mathbf{p}\,\varepsilon) \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_{12} - i\varepsilon t_{12}}$$

$$\Downarrow$$

$$G^{\mathrm{R}}(\mathbf{p}\,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_+ - \xi_{\mathbf{p}}} \qquad \xi_{\mathbf{p}} \equiv \frac{p^2}{2m} - \mu$$

$$G^{\mathrm{A}}(\mathbf{p}\,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_- - \xi_{\mathbf{p}}}$$

$$G^{\mathrm{K}}(\mathbf{p}\,\varepsilon) = 2\pi i (2 f_{\mathbf{p}} - 1) \delta(\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}})$$

輸送方程式の微視的導出法

Dyson 方程式

$$G^{-1}G = GG^{-1} = 1$$

左—右

$$G^{-1}G - GG^{-1} = 0$$

$\mathcal{E}$ 積分
Kadanoff-Baym

$\xi_{\mathbf{p}}$ 積分
Prange-Kadanoff
Eilenberger

Landau-Boltzmann
方程式

準古典方程式

ダイソン方程式(正常状態)

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - U_1 + \mu \right] G(1,2) = \delta(1,2)$$

外場

$$(1 \equiv \mathbf{r}_1 t_1)$$

Wigner表示

$$G(1,2) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} G(\mathbf{p}\varepsilon, \mathbf{R}\,T) \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_{12} - i\varepsilon t_{12}}$$

$\Downarrow$ 　 $\mathbf{R}T$ について展開

$$1 = (\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} - U) G(\mathbf{p}\varepsilon\mathbf{R}\,T)$$

$$+ \frac{i}{2}\left(\partial_T + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\partial_{\mathbf{R}} + \frac{\partial U}{\partial T}\cdot\partial_{\varepsilon} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}\cdot\partial_{\mathbf{p}} \right) G(\mathbf{p}\varepsilon\mathbf{R}\,T)$$

$$\xi_{\mathbf{p}} \equiv \frac{p^2}{2m} - \mu, \qquad U \equiv U(\mathbf{R}\,T), \qquad \partial_{\mathbf{R}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}$$

輸送方程式(左ー右)

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}+\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}+\frac{\partial U}{\partial T}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)G(\mathbf{p}\varepsilon\mathbf{R}\,T)=0$$

$\Downarrow$ 変数の消去

(1) ε 積分 ⟶ Landau-Boltzmann Eq.

$$f(\mathbf{pR}\,T)\equiv\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{2\pi i}G^{\mathrm{K}}(\mathbf{p}\varepsilon\mathbf{R}\,T)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}G^{\mathrm{K}}(\mathbf{p}\varepsilon\mathbf{R}\,T)=0$$

準粒子近似

$\Downarrow$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}+\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)f(\mathbf{pR}\,T)=0$$

(2) $\xi_{\mathbf{p}}$ 積分 ⟶ 準古典方程式

$$f(\hat{\mathbf{p}}\varepsilon\mathbf{R}\,T) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{2\pi i} G^{\mathrm{K}}(\mathbf{p}\varepsilon\mathbf{R}\,T)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} G^{\mathrm{K}}(\mathbf{p}\varepsilon\mathbf{R}\,T) = 0$$

準粒子近似

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) f(\hat{\mathbf{p}}\varepsilon\mathbf{R}\,T) = 0$$

どちらの適用範囲が広い？

相互作用のある場合
Dyson方程式 に自己エネルギー項

$$\Sigma(\mathbf{p}\varepsilon,\mathbf{R}\,T)G(\mathbf{p}\varepsilon,\mathbf{R}\,T)$$

(1) ε 積分

$$\Sigma(\mathbf{p}\varepsilon)\approx\Sigma(\mathbf{p}0)+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Sigma(\mathbf{p}\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon$$

実数で近似

(2) $\xi_{\mathbf{p}}$ 積分

$$\Sigma(\mathbf{p}\varepsilon)\approx\Sigma(\mathbf{p}_{\mathrm{F}}\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\Sigma(\mathbf{p}\varepsilon)\Big|_{\mathbf{p}=0}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\mathrm{F}})$$

準古典方程式の適用範囲大

(1) $\Sigma(\mathbf{p}\varepsilon,\mathbf{R}\,T)$ の**p**依存性弱い

ε依存性は大きい場合あり
(ex. 電子格子相互作用)

(2) 寿命が短くても使える

ξ積分では $\Sigma(\mathbf{p}_{\mathrm{F}}\varepsilon)$ が
大きな虚部をもってもよい

コメント

●衝突項は自己エネルギー項から

$$\Sigma(\mathbf{p}\varepsilon,\mathbf{R}T)G(\mathbf{p}\varepsilon,\mathbf{R}T)$$

●超伝導状態の輸送方程式

$$\hat{G}=\begin{bmatrix} G & F \\ -F^* & -G^* \end{bmatrix}$$ ：南部行列

$$G(1,2)\propto -i\left\langle T\psi(1)\psi^\dagger(2)\right\rangle$$

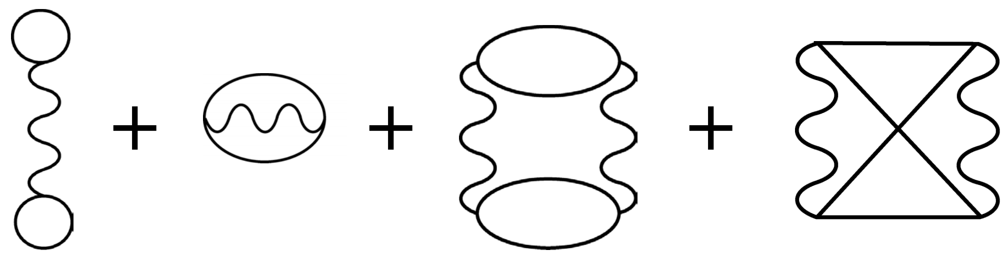
$$F(1,2)\propto -i\left\langle T\psi(1)\psi(2)\right\rangle$$

に同じ操作をすることで得られる。
分布関数を決める式
ペアポテンシャル Δ を決める式

（CDWの輸送方程式も同様）

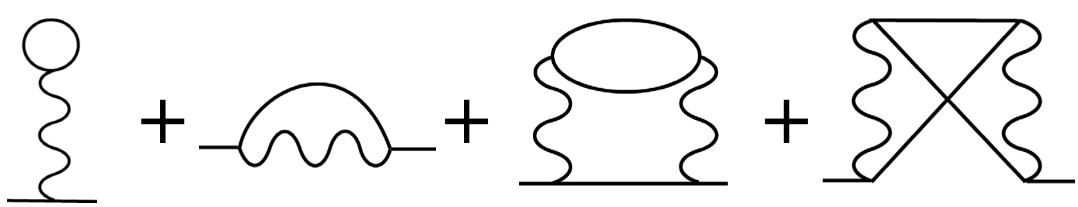
保存則成立の条件(Baym)

$\Phi =$



$$\Sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial G}$$

$=$



- Σ は Φ の G についての汎関数微分で！
- Σ と G を自己無撞着に決定！

左Dyson

$$i\frac{\partial}{\partial t_1}G(1,2)-\left(\frac{-1}{2m}\nabla_1^2-\mu\right)G(1,2)$$
$$-\int \Sigma(1,3)G(3,2)d3=\delta(1,2)$$

右Dyson

$$-i\frac{\partial}{\partial t_2}G(1,2)-\left(\frac{-1}{2m}\nabla_2^2-\mu\right)G(1,2)$$
$$-\int G(1,3)\Sigma(3,2)d3=\delta(1,2)$$

右 - 左

$$-i\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial t_2}\right)G(1,2)-\frac{(\nabla_1+\nabla_2)\cdot(\nabla_1-\nabla_2)}{2m}G(1,2)$$
$$+\int\left[\Sigma(1,3)G(3,2)-G(1,3)\Sigma(3,2)\right]d3=0$$

粒子数と運動量

$$n(1)=-iG(1,1_+),\qquad \mathbf{j}(1)=\frac{-(\nabla_1-\nabla_2)}{2m}G(1,2)\Big|_{2=1_+}$$

粒子数の時間変化

$$\frac{\partial n(1)}{\partial t_1}+\nabla\cdot\mathbf{j}(1)=-\int\left[\Sigma(1,3)G(3,2)-G(1,3)\Sigma(3,2)\right]d3$$

右辺$=0$!?

$$\Sigma(1,2)=\frac{\delta\Phi}{\delta G(2,1)}$$ の関係があるとき

G の微小変化による Φ の変化

$$\delta\Phi=\iint d1d2\frac{\delta\Phi}{\delta G(2,1)}\delta G(2,1)$$
$$=\iint d1d2\ \Sigma(1,2)\delta G(2,1)$$

ゲージ変換： $G(2,1)\rightarrow \mathrm{e}^{i\Lambda(2)}G(2,1)\mathrm{e}^{-i\Lambda(1)}$

G の微小変化： $\delta G(2,1)=i\Lambda(2)G(2,1)-G(2,1)i\Lambda(1)$

ゲージ変換により Φ は不変であるから

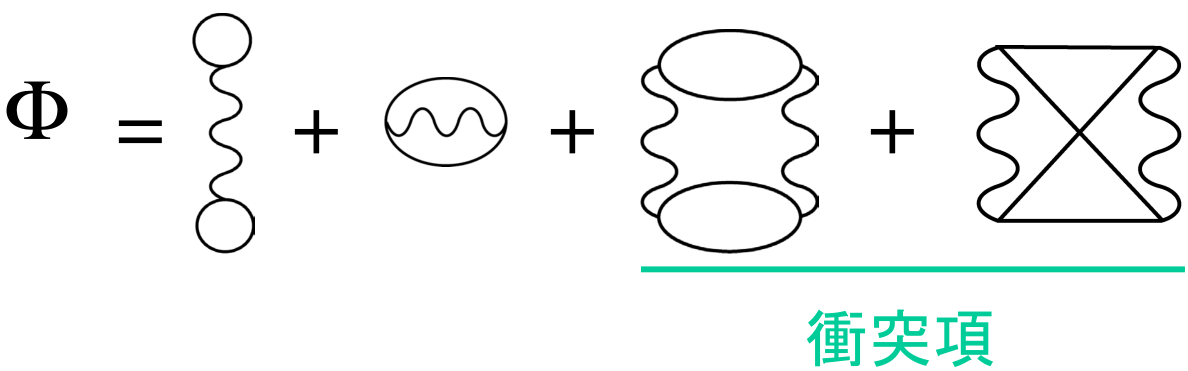
$$0=\delta\Phi=\iint d1d2\ \Sigma(1,2)\left[i\Lambda(2)G(2,1)-G(2,1)i\Lambda(1)\right]$$
$$=i\int d1\Lambda(1)\int d2\left[\Sigma(2,1)G(1,2)-\Sigma(1,2)G(2,1)\right]$$

$\Lambda(1)$ は任意であるから

$$\int d2\ \left[G(1,2)\Sigma(2,1)-\Sigma(1,2)G(2,1)\right]=0$$

保存則成立！

準古典近似—考慮すべき図形



２体相互作用ではこれらの図形のみ！！

他の項は量子補正

Serene&Rainer, Phys. Rep. <u>101</u> (1983) 221.
Appendix A

ホール項とゲージ不変性

(1) この方法では**ホール項**は導出できない

$$e(\mathbf{v}\times\mathbf{h})\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$$

(2) ゲージ不変性がない！？

$$
\begin{aligned}
&-i\nabla_1 - e\mathbf{A}_1 \\
&= -i\nabla_{\mathbf{r}} - \frac{i}{2}\nabla_{\mathbf{R}} - e\mathbf{A}(\mathbf{R}\,T) \\
&\qquad - \frac{e}{2}\left[\mathbf{r}_{12}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + t_{12}\frac{\partial}{\partial T}\right]\mathbf{A}(\mathbf{R}\,T) + \cdots
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial R_j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}h_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_k}{\partial R_j} + \frac{\partial A_j}{\partial R_k}\right)$$

これまでの研究

- Larkin and Ovchinnikov (1995)

  particle-hole asymmetry の効果
  小さい！

- Kopnin (1994)

  静的電磁場･clean limit　の理論
  導出過程が明快でない

- Houghton and Vekhter (1998)

  静的電磁場の場合の理論
  ゲージ不変性なし！

- Levanda and Fleurov (1994)

  ゲージ不変なBoltzmann方程式
  （半導体）

目的

● ホール項を持ちゲージ不変性のある輸送方程式の導出

輸送方程式の
微視的導出法の確立
(金属, 超伝導, CDW)

● 多体効果の影響

● 時間変動する電場への応答

出発点ーDyson方程式(R成分)
$(G^{-1}G = 1)$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} - e\Phi_1\hat{\tau}_3\right)\hat{G}(1,2) - \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 \\ 0 & -\mathcal{H}_1^* \end{bmatrix}\hat{G}(1,2)$$

$$-\int \hat{\Sigma}(1,3)\hat{G}(3,2)d3 = \delta(1,2)\hat{1}$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G & F \\ -F^* & -G^* \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma & \Delta \\ -\Delta^* & -\Sigma^* \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2m}\left(-i\nabla_1 - e\mathbf{A}_1\right)^2 - \mu$$

$(\Phi, \mathbf{A})$: 電磁ポテンシャル

ゲージ不変性

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}-e\Phi_1\hat{\tau}_3\right)\hat{G}(1,2)-\begin{bmatrix}\mathcal{H}_1 & 0\\ 0 & -\mathcal{H}_1^*\end{bmatrix}\hat{G}(1,2)$$

$$-\int\hat{\Sigma}(1,3)\hat{G}(3,2)d3=\delta(1,2)\hat{1}$$

この方程式は

$$\begin{cases}\hat{G}(1,2)\to\exp(ie\chi_1\hat{\tau}_3)\hat{G}(1,2)\exp(-ie\chi_2\hat{\tau}_3)\\ \mathbf{A}_1\to\mathbf{A}_1+\dfrac{\partial\chi_1}{\partial\mathbf{r}_1}\\ \Phi_1\to\Phi_1-\dfrac{\partial\chi_1}{\partial t_1}\end{cases}$$

に対して不変（形を変えない）

Gのゲージ変換性

$$\hat{G}(1,2) \rightarrow \exp(ie\chi_1\hat{\tau}_3)\hat{G}(1,2)\exp(-ie\chi_2\hat{\tau}_3)$$

1,2の双方に依存

$\Downarrow$

$(\mathbf{r}_{12}, t_{12})$ についてのFourier変換ダメ！

変換が$(\mathbf{R}, T)$だけに依存するように

$\Downarrow$

$(\mathbf{r}_{12}, t_{12})$　についてのFourier変換

$$\hat{\bar{G}}(1,2) \equiv \exp[iI(\vec{R},\vec{r}_1)\hat{\tau}_3]\hat{G}(1,2)\exp[-iI(\vec{R},\vec{r}_2)\hat{\tau}_3]$$

$$I(\vec{R},\vec{r}_1) \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{R}} \vec{A}(\vec{s})\cdot d\vec{s}$$

$\vec{r}_1 \equiv (ct_1, \mathbf{r}_1)$,　$\vec{A} \equiv (\Phi, -\mathbf{A})$,　$d\vec{s}$ ： 直線

ゲージ変換性

$$\hat{\bar{G}}(1,2) \to \exp[ie\chi(\vec{R})\hat{\tau}_3]\hat{\bar{G}}(1,2)\exp[-ie\chi(\vec{R})\hat{\tau}_3]$$

$\bar{G}(1,2) \to \bar{G}(1,2)$,

$\bar{F}(1,2) \to \bar{F}(1,2)\exp[2ie\chi(\vec{R})]$: 電荷$2e$のW.F.

重心座標$\vec{R}$のみに依存！

$$\Downarrow$$

$(\mathbf{r}_{12}, t_{12})$についてのFourier変換OK

Strategy

- Dyson方程式の書き換え

$$\hat{G} \longrightarrow \hat{\bar{G}}$$

- 重心座標の Gradient Expansion
- 左 Dysonー右 Dyson
- ξ について積分

$$\Downarrow$$

ゲージ不変な輸送方程式

(R成分につき実行—A,K成分も同様）

微分項(静的電磁場)

$$e^{iI(\vec{R},\vec{r}_1)-iI(\vec{R},r_2)}\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}-e\Phi_1\right)G(1,2)$$

$$=\left[\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial T}+i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{e}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}\right]\overline{G}(1,2)$$

E: 電場
h: 磁場

$$e^{iI(\vec{R},\vec{r}_1)-iI(\vec{R},r_2)}\left(-i\nabla_1-e\mathbf{A}_1\right)G(1,2)$$

$$=\left[-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}-i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}-\frac{e}{2}(\mathbf{h}\times\mathbf{r}-\mathbf{E}t)\right]\overline{G}(1,2)$$

$$e^{iI(\vec{R},\vec{r}_1)+iI(\vec{R},r_2)}\left(-i\nabla_1-e\mathbf{A}_1\right)F(1,2)$$

$$=\left[-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}-e\mathbf{A}-i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}-\frac{e}{4}(\mathbf{h}\times\mathbf{r}-\mathbf{E}t)\right]\overline{F}(1,2)$$

ゲージ不変な微分＋ホール項！

ゲージ不変な微分

$$\partial_T \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial T} & \text{on } G, G^*, \mathbf{E}, \mathbf{h} \\ \dfrac{\partial}{\partial T} + 2ie\Phi(\vec{R}) & \text{on } F \\ \dfrac{\partial}{\partial T} - 2ie\Phi(\vec{R}) & \text{on } F^* \end{cases}$$

$$\partial_{\mathbf{R}} \equiv \begin{cases} \nabla_{\mathbf{R}} & \text{on } G, G^*, \mathbf{E}, \mathbf{h} \\ \nabla_{\mathbf{R}} - 2ie\mathbf{A}(\vec{R}) & \text{on } F \\ \nabla_{\mathbf{R}} + 2ie\mathbf{A}(\vec{R}) & \text{on } F^* \end{cases}$$

微分項はすべて ∂_T と $\partial_{\mathbf{R}}$ で表せる

自己エネルギー項

- ゲージ不変な微分で表せるか否か？
- 電子の質量mが如何に変更を受けるか？
- 新たな項が現れるか否か？

$$\Downarrow$$

- ゲージ不変な微分で表せる！
- $m \longrightarrow m^*$
- 否

より具体的には

(1) $\int \hat{\Sigma}(1,3)\hat{G}(3,2)d3$ を $\hat{\bar{\Sigma}}$ と $\hat{\bar{G}}$ で表す

(2) ゲージ不変な微分の使用

(3) Fourier 変換

$$\hat{\bar{\Sigma}}(1,2) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\int \frac{d\varepsilon}{2\pi}\hat{\Sigma}(\mathbf{p}\varepsilon,\mathbf{R}T)$$

$$\times \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)-i\varepsilon(t_1-t_2)}$$

(4) 展開

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{p}\varepsilon,\mathbf{R}T) \approx \hat{\Sigma}(\mathbf{p}_{\mathrm{F}}\varepsilon,\mathbf{R}T)$$

$$+\left(\frac{\mathbf{v}_{\mathrm{F}}}{a}-\frac{\mathbf{p}_{\mathrm{F}}}{m}\right)\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\mathrm{F}})$$

a : 繰り込み因子

左Dyson方程式

$$
\left(\varepsilon\hat{1}-\hat{\sigma}\hat{\tau}_3\right)\circ\hat{G}-\xi\hat{\tau}_3\circ\hat{G}+\frac{i}{2}\mathbf{v}_{\mathrm{F}}\cdot\partial_{\mathbf{R}}\hat{\tau}_3\hat{G}
$$

$$
+\frac{i}{8}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\left(3\hat{\tau}_3\hat{G}+\hat{G}\hat{\tau}_3\right)
$$

$$
+\frac{i}{8}\mathbf{v}_{\mathrm{F}}\cdot\left(\mathbf{h}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}+\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\left(3\hat{G}+\hat{\tau}_3\hat{G}\hat{\tau}_3\right)
$$

$$
=a\hat{1}
$$

$\mathbf{v}_{\mathrm{F}}$：フェルミ速度， $\hat{\tau}_3$：パウリ行列

$$
\hat{\sigma}(\hat{\mathbf{p}}\varepsilon,\mathbf{R}T)\equiv a\left(\frac{p_{\mathrm{F}}^2}{2m}-\mu\right)\hat{1}+a\hat{\Sigma}(\mathbf{p}_{\mathrm{F}}\varepsilon,\mathbf{R}T)\hat{\tau}_3
$$

- ξ を消去（左ー右）
- ξ について積分

準古典方程式

準古典グリーン関数

$$\hat{g}(\hat{\mathbf{p}}\varepsilon,\mathbf{R}\,T)\equiv\frac{i}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_{\mathbf{p}}\hat{\tau}_3\hat{G}(\mathbf{p}\varepsilon,\mathbf{R}\,T)$$

準古典方程式

$$[\varepsilon\hat{\tau}_3-\hat{\sigma},\hat{g}]_{\circ}+i\mathbf{v}_{\mathrm{F}}\cdot\partial_{\mathbf{R}}\hat{g}$$

$$+\frac{i}{2}e\left[(\mathbf{v}_{\mathrm{F}}\times\mathbf{h})\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}+\mathbf{v}_{\mathrm{F}}\cdot\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right][\hat{\tau}_3,\hat{g}]$$

$$=0$$

記号の説明

$$[A,B]\equiv AB-BA$$

$$\{A,B\}\equiv AB+BA$$

$$A\circ B\equiv \exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial T'}-\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial}{\partial\varepsilon'}\right)\right]$$

$$\times A(\varepsilon,T)B(\varepsilon',T')\Big|_{\varepsilon'=\varepsilon,T'=T}$$

$$[A,B]_\circ\equiv A\circ B-B\circ A$$

$$\hat{\sigma}(\hat{\mathbf{p}}\varepsilon,\mathbf{R}T)\equiv a\left(\frac{p_{\mathrm{F}}^2}{2m}-\mu\right)\hat{1}+a\hat{\Sigma}(\mathbf{p}_{\mathrm{F}}\varepsilon,\mathbf{R}T)\hat{\tau}_3$$

$\hat{\tau}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$：パウリ行列

$\mathbf{v}_{\mathrm{F}}$：フェルミ速度

正常金属

$$g^{\mathrm{R}} = -g^{\mathrm{A}} = 1 \quad (\propto \text{ 状態密度})$$

$$\frac{\partial g^{\mathrm{K}}}{\partial T} + \mathbf{v}_{\mathrm{F}} \cdot \frac{\partial g^{\mathrm{K}}}{\partial \mathbf{R}} + \left[e\mathbf{v}_{\mathrm{F}} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + e(\mathbf{v}_{\mathrm{F}} \times \mathbf{h}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] g^{\mathrm{K}}$$

$$= i[2\sigma^{\mathrm{K}} + (\sigma^{\mathrm{A}} - \sigma^{\mathrm{R}})]g^{\mathrm{K}}$$

ゲージ不変性

$$[\varepsilon\hat{\tau}_3-\hat{\sigma},\hat{g}]_\circ+i\mathbf{v}_\mathrm{F}\cdot\partial_\mathbf{R}\hat{g}$$

$$+\frac{i}{2}e\left[(\mathbf{v}_\mathrm{F}\times\mathbf{h})\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}+\mathbf{v}_\mathrm{F}\cdot\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right][\hat{\tau}_3,\hat{g}]$$

$$=0$$

この方程式は
$$\begin{cases}\hat{g}\rightarrow\ \mathrm{e}^{ie\chi(\vec{R})\hat{\tau}_3}\ \hat{g}\ \mathrm{e}^{-ie\chi(\vec{R})\hat{\tau}_3}\\ \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{A}+\dfrac{\partial\chi}{\partial\mathbf{R}}\\ \Phi\rightarrow\Phi-\dfrac{\partial\chi}{\partial T}\end{cases}$$

に対して不変（形を変えない）

時間変動する電磁場

$$\left[\varepsilon\hat{\tau}_3 - \hat{\sigma}, \hat{g}\right]_\circ + i\mathbf{v}_\mathrm{F}\cdot\partial_\mathbf{R}\hat{g}$$

$$+\frac{i}{2}\mathcal{O}_g\left[\hat{\tau}_3, \hat{g}\right] + \frac{i}{2}\mathcal{O}_f\left\{\hat{\tau}_3, \hat{g}\right\} = 0$$

$$\mathcal{O}_g = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\eta\ e\left\{\left[\mathbf{v}_\mathrm{F}\times\mathbf{h}\left(\mathbf{R}, T - \frac{i}{2}\eta\partial_\varepsilon\right)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right.$$

$$\left. + e\mathbf{v}_\mathrm{F}\cdot\mathbf{E}\left(\mathbf{R}, T - \frac{i}{2}\eta\partial_\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right\}$$

$$\mathcal{O}_f = \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1} - \int_{-1}^{0}\right) d\eta\ e\left\{\left[\mathbf{v}_\mathrm{F}\times\mathbf{h}\left(\mathbf{R}, T - \frac{i}{2}\eta\partial_\varepsilon\right)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right.$$

$$\left. + e\mathbf{v}_\mathrm{F}\cdot\mathbf{E}\left(\mathbf{R}, T - \frac{i}{2}\eta\partial_\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right\}$$

まとめ

●ホール項を含んだ超伝導輸送方程式（準古典方程式）の導出

方程式のゲージ不変性に着目
渦糸状態のホール効果研究の基礎

●輸送方程式の微視的導出法の確立